



Giuseppe Fera*,
David Merlin*,
Giacomo Torzo**

*Liceo Scientifico
Statale "G.B. Quadri",
Vicenza

**Dipartimento
Fisica Università
di Padova

Analisi di un sistema di conversione dell'energia

(Pervenuto il 20.12.2009, pprovato il 17.5.2010)

ABSTRACT

In the context of the "Lauree Scientifiche - Scienza dei materiali" project, highschool students analyze the energy transfers in a kit including a solar cell, two PEM cells (electrolyzer and fuel cell) and a fan, with special attention to the hydrogen stocking process in the reservoir.

Riassunto

L'articolo descrive un'attività svolta da studenti liceali nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche - Scienza dei materiali. Sono stati analizzati i processi energetici che si svolgono in un kit costituito da una cella solare, due celle PEM (una per l'elettrolisi dell'acqua e l'altra per la successiva ricombinazione) ed un ventilatore, con particolare attenzione allo stoccaggio dell'energia nel serbatoio dell'idrogeno.

Introduzione

L'attività didattica qui descritta è stata realizzata per dare l'opportunità agli studenti delle scuole superiori di entrare in contatto con la Scienza dei materiali. Questa disciplina intreccia Fisica e Chimica ed ha interessanti applicazioni tecnologiche. L'obiettivo è anche quello di inserire nei curricoli degli studenti di scuola superiore attività di laboratorio condotte con tecnologia RTL (sistema di acquisizione dati in tempo reale) e di favorire la riflessione intorno ai processi dell'osservare, misurare, dedurre, modellizzare. L'attività è stata resa possibile dal sostegno finanziario dell'Università di Padova che ha fornito alla scuola in cui è stata condotta il kit utilizzato per condurre le esperienze ed ha addestrato gli insegnanti alla sua utilizzazione. Questa attività è inserita nel Progetto Lauree Scientifiche - Scienza dei materiali dell'Università di Padova.

L'attività è stata realizzata da un gruppo di una decina di studenti provenienti dalle classi quarte del Liceo Scientifico Statale "G. B. Quadri" di Vicenza assistiti da tre insegnanti, due di Matematica e Fisica ed uno di Scienze. Nella primavera del 2009 sono state svolte delle lezioni pomeridiane di carattere teorico seguite da altri incontri, sempre pomeridiani, per le osservazioni del funzionamento del kit e l'esecuzione delle misure. Gli studenti hanno illustrato l'attività svolta al concorso tenuto in Venezia il 25 maggio 2009 nell'ambito del Progetto Regionale Lauree Scientifiche - Scienza dei materiali del Veneto.

Si è pensato di coinvolgere gli studenti in una ricerca sperimentale sulle trasformazioni energetiche operate dal kit sfruttando il fascino immediato che questo semplice apparato esercita sugli studenti; dal punto di vista dell'insegnante, i processi coinvolti si prestano a diversi livelli di lettura e di approfondimento. All'insegnante è offerta la possibilità di prendere spunto dal funzionamento del kit per introdurre gli studenti ad un gran numero di fenomeni di fisica, sia classica che moderna, e di chimica, e di stimolarli a riflettere sui fenomeni di trasformazione, trasferimento e immagazzinamento dell'energia.

L'apparato sperimentale

Il kit fornito dall'Università di Padova comprende sei elementi disposti su un supporto lungo una ventina di centimetri e largo dieci. È composto da un pannello fotovoltaico con superficie totale $15 \times 7 \text{ cm}^2$ (di cui 50 cm^2 efficaci), una cella PEM1 (Proton Exchange Membrane) per l'elettrolisi, due serbatoi cilindrici (fissi) di portata 20 cm^3 e sensibilità 1 cm^3 per contenere i gas prodotti dall'elettrolisi,

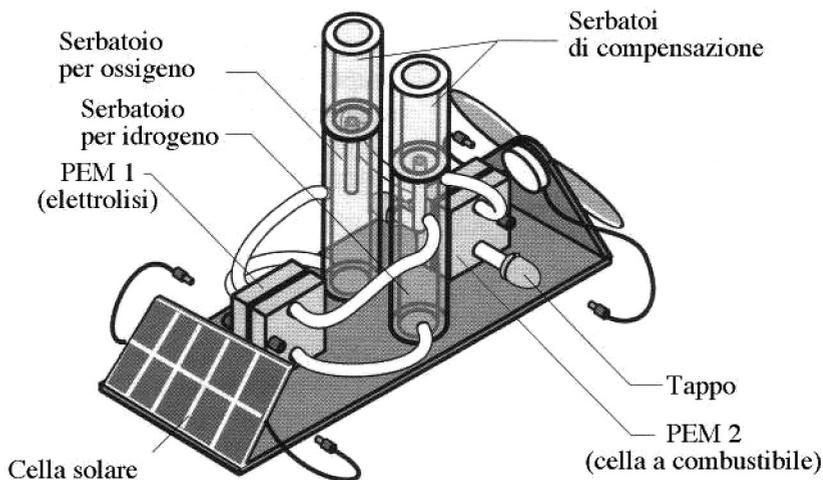


Figura 1. Schema del kit utilizzato.

sormontati da due serbatoi (rimovibili) di espansione dell'acqua spostata dai suddetti gas, dalla cella PEM2 per la ricombinazione dei gas, e da un ventilatore che funge da carico elettrico. Il collegamento tra il pannello solare e la cella PEM1 è realizzato da cavetti elettrici, così come il collegamento tra la cella PEM2 ed il ventilatore; i serbatoi dei gas sono invece collegati alle due celle PEM da tubicini di gomma. Sono presenti 3 coppie di tubicini; la coppia relativa alla cella PEM2 serve a convogliare i gas dai serbatoi alla cella. Per quanto riguarda la cella PEM1, la coppia di tubicini inferiore convoglia l'acqua deionizzata alla cella, mentre la coppia superiore convoglia i gas ai serbatoi.

Per far funzionare il kit occorre: inumidire le membrane interne alle due celle PEM staccando i tubicini di collegamento posti in alto, pompando in essi l'acqua deionizzata con una siringa e riattaccandoli; riempire di acqua deionizzata i due serbatoi fissi dei gas (vedi fig. 1); montare sopra di essi i serbatoi di espansione; esporre il kit alla luce solare, o, in mancanza di questa, alla luce di una lampada. Una volta chiuso il circuito elettrico che connette la cella solare alla cella PEM1, in condizioni di illuminazione sufficientemente intensa, la tensione erogata dal pannello innesca l'elettrolisi dell'acqua operata dalla prima cella PEM. I gas prodotti dall'elettrolisi, idrogeno ed ossigeno, cominciano ad accumularsi nei due serbatoi finché, dopo una decina di minuti, le loro pressioni sono sufficienti per innescare la reazione di ricombinazione nella seconda cella PEM. La tensione elettrica generata dalla cella PEM2 permette il funzionamento del motorino elettrico del ventilatore, quando il circuito secondario sia chiuso.

Questo apparato dimostra come sia possibile usare l'energia luminosa prodotta da una lampada o dal sole, convertita in energia elettrica mediante una cella fotovoltaica, per scindere mediante una cella elettrolitica PEM le molecole di acqua nei componenti costituenti (con stoccaggio dell'energia potenziale chimica nei gas prodotti idrogeno H_2 e ossigeno O_2) e poi ricombinare i due gas mediante una cella a combustibile PEM, producendo nuovamente acqua ed energia elettrica, che può essere usata per azionare un ventilatore (energia meccanica) tramite un motorino.

Le due celle PEM sono esattamente identiche e vengono usate entrambe come convertitore elettrochimico: una volta nel verso di dissociazione dell'acqua in idrogeno e ossigeno gassosi e poi nel verso di formazione dell'acqua.

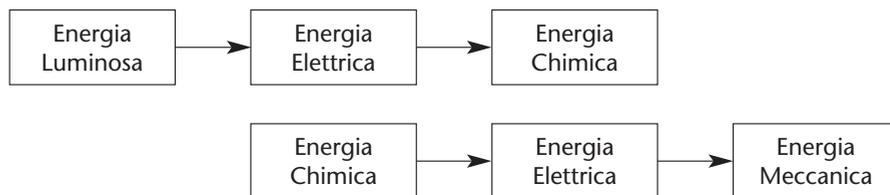


Figura 2. Schema delle trasformazioni energetiche.

Esperimenti eseguibili con l'apparato

Se si dispone di un sistema di acquisizione dati in tempo reale (RTL) si possono analizzare diverse caratteristiche del sistema che illustra il ciclo dell'idrogeno, in particolare si può evidenziare la dinamica del processo e mostrare, oltre alla conversione fotovoltaica dell'energia, la conversione di energia elettrica in energia chimica (elettrolisi di H_2O) e la riconversione di questa in energia elettrica (cella a combustibile H_2-O_2), anche il fenomeno dello stoccaggio dell'energia chimica, e calcolare il rendimento dei diversi processi.

L'energia luminosa affluisce sulla cella fotovoltaica trasportata dalle onde elettromagnetiche; viene convertita in energia elettrica che alimenta l'elettrolisi operata dalla cella PEM1. Questa converte l'energia elettrica in energia chimica. L'energia chimica viene immagazzinata nei legami dell'idrogeno gassoso e dell'ossigeno gassoso, che fungono da vettori dell'energia per questo processo. La cella PEM2 riconverte l'energia chimica in energia elettrica che viene condotta all'utilizzatore dalla corrente che scorre nel circuito secondario per essere infine convertita in energia meccanica.

Per misurare il flusso di energia incidente sulla cella fotovoltaica si usa una sonda di intensità luminosa posta accanto alla superficie della cella fotovoltaica. La sonda fornisce la misura in lux che poi vanno convertiti in W/m^2 (vedi appendice) e rapportati alla superficie efficace della cella fotovoltaica. Per misurare l'energia che arriva alla cella PEM1 basta misurare la tensione e la corrente che la alimentano. Analogamente per misurare l'energia prodotta dalla cella a combustibile PEM2. Da queste misure si deducono i rendimenti dei diversi processi di trasformazione dell'energia. Affinché si svolga la reazione di ricomposizione, il circuito secondario deve essere chiuso sull'utilizzatore.

Misurando il tempo di produzione dell'idrogeno nei serbatoi di accumulazione (tipicamente viene prodotto 1 cm^3 di H_2 in meno di un minuto) e supponendo noto il valore della carica elettrica elementare, si può ottenere una stima del numero di Avogadro.

Usando ancora le misure del tempo di produzione dell'idrogeno si può ottenere una stima dell'energia necessaria a dissociare una data quantità di acqua e quindi stimare l'energia di legame della molecola di H_2O .

La teoria

L'analisi teorica riguarda il funzionamento della cella fotovoltaica, ed il funzionamento della cella PEM.

Per quanto riguarda la cella fotovoltaica, la conoscenza teorica è costituita dalla teoria dei semiconduttori applicata alla giunzione PN. È stato descritto agli studenti l'effetto fotoelettrico per introdurli al fenomeno della produzione di corrente da parte della cella fotovoltaica (vedi G. Torzo, B. Pecori: "Studio sperimentale di una cella fotovoltaica" *La Fisica nella Scuola* XXXVIII, 249-256 (2005)).

I semiconduttori sono materiali per i quali la banda di valenza è completamente occupata, ma tali che la differenza di potenziale tra la banda di valenza e

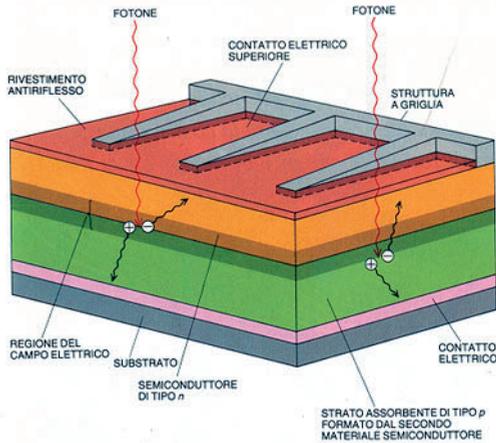
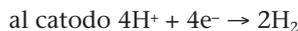
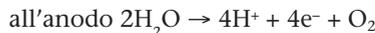


Figura 3. Schema della cella fotovoltaica.

La banda di conduzione è relativamente piccola, permettendo l'eccitazione degli elettroni alla banda di conduzione anche a temperature ordinarie. Il drogaggio consiste nell'immissione nel reticolo del semiconduttore di atomi estranei aventi un elettrone in più (donori) o in meno (accettori) al fine di aumentarne la conducibilità. Si ha il drogaggio di tipo P quando vengono inseriti atomi con un elettrone in meno rispetto a quelli del reticolo. Si crea una lacuna che si comporta da carica positiva libera; si ha il drogaggio di tipo N quando vengono inseriti atomi con un elettrone in più rispetto a quelli del reticolo che si comporta da

carica negativa libera. Si costituisce una giunzione PN accostando un semiconduttore drogato P e uno drogato N. Nella zona di contatto tra i due cristalli si crea la zona di svuotamento, un sottile strato elettricamente neutro all'interno del quale è presente un campo elettrico relativamente intenso anche in assenza di tensione elettrica applicata dall'esterno. Questa giunzione è alla base del funzionamento dei diodi semiconduttori di cui il fotodiode rappresenta un tipo particolare in cui il semiconduttore drogato N ha uno spessore sottile, così da permettere alla luce di penetrare nella regione prossima alla giunzione PN. Quando la cella fotovoltaica viene investita dalla radiazione luminosa, la luce che colpisce la zona di svuotamento genera al suo interno delle coppie elettrone-lacuna. Il campo elettrico presente nella zona di svuotamento separa gli elettroni dalle lacune generando una tensione tra i poli della cella. Se la cella è chiusa su un circuito esterno il flusso di cariche così generato sussiste fintanto che il fotodiode riceve la radiazione.

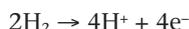
La cella PEM contiene un catodo e un anodo costituiti da due lamine metalliche piane parallele. Tra esse è posta una membrana di polimeri perfluorati, che permette il passaggio dei soli ioni idrogeno impedendo invece il passaggio degli elettroni. I gas vengono portati a contatto con gli elettrodi attraverso due serpentine poste al loro esterno e collegati ai tubicini di gomma (vedi fig. 1) che permettono l'afflusso e il deflusso dei gas. La cella PEM1 viene utilizzata come cella elettrolitica, per cui le reazioni che si svolgono in essa sono:



e complessivamente l'acqua viene dissociata nei suoi costituenti gassosi, con assorbimento di energia da parte della cella. I gas si sviluppano nella serpentina interna alla membrana della cella e vengono condotti nei due serbatoi di accumulazione.

1. La cella PEM2 viene utilizzata come cella combustibile; il ruolo del catodo e dell'anodo si scambiano e le reazioni che avvengono sono quelle inverse delle precedenti, con rilascio di energia da parte della cella. Il processo di ricomposizione dell'acqua è favorito dal punto di vista energetico, ma necessita di

un catalizzatore per superare la resistenza di reazione. In questo processo, comunque, viene liberata una quantità di energia minore di quella impiegata per la decomposizione, perché un po' di energia va dispersa a causa di altri processi fisico-chimici. Quando l'anodo è immerso nell'idrogeno e il catodo nell'ossigeno, all'anodo due molecole d'idrogeno si decompongono in quattro protoni con la liberazione di elettroni:



I protoni formati migrano attraverso la membrana al catodo, si ossidano con l'ossigeno e formano acqua:



Per formare l'acqua occorrono gli elettroni che prima sono stati ceduti all'anodo. La membrana non consente il passaggio agli elettroni. Collegando i due elettrodi (catodo e anodo) con un conduttore elettrico, gli elettroni partendo dall'anodo raggiungono il catodo viaggiando all'esterno della cella: quindi si genera una corrente elettrica sfruttabile. Questo processo si svolge senza interruzione fino a che permane una sufficiente quantità di idrogeno e di ossigeno.

Osservazioni e misure

Usando il sistema di acquisizione dei dati costituito da un sensore di luce, due sensori di corrente e due di tensione elettrica connessi al computer tramite l'interfaccia LabPro Vernier è stato possibile costruire i grafici delle grandezze necessarie per le misure del numero di Avogadro, della energia di legame dell'acqua, del rendimento del pannello fotovoltaico e del rendimento dello stoccaggio dell'idrogeno.

V (cm ³)	5	5	5	5	5	5
Δt (s)	206	198	206	140	142	144
Q (C)	39,32	38,40	40,08	39,81	40,05	39,97

Tabella 1. Misure di carica.

Per quanto riguarda il numero di Avogadro, si è osservata la produzione di 5 cm³ di H₂ negli intervalli di tempo Δt (vedi tabella 1) in sei distinte misure di corrente (approssimativamente costante) attraverso la cella PEM1. L'integrale della

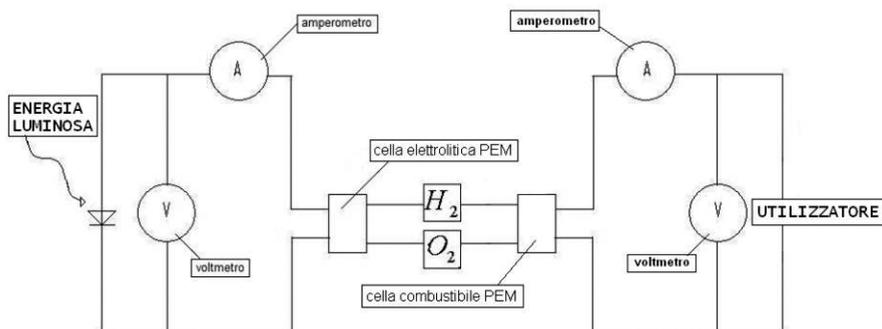


Figura 4. Schema dei collegamenti elettrici.

corrente calcolato su ciascun intervallo di tempo ha fornito la carica che transitava nel circuito provocando l'elettrolisi; in media è $Q = 39,6$ C. Supponendo nota la carica dell'elettrone $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C e tenendo presente la stechiometria della reazione si ricava che il numero di atomi di H è pari al numero di elettroni che hanno attraversato il circuito. Quindi in 5 cm^3 di idrogeno ci sono in media $N = Q/e = 2,47 \times 10^{20}$ atomi di H. La densità dell'idrogeno alla temperatura dell'esperimento ($21 \text{ }^\circ\text{C}$) è $0,0835 \text{ g/dm}^3$. Con questo valore di densità, N atomi di H sono contenuti in una massa di $4,18 \times 10^{-4}$ grammi. Ne segue che la massa di un atomo di idrogeno risulta $m_{\text{H}} = 1,69 \times 10^{-24}$ g e quindi il numero di Avogadro $N_{\text{A}} = 1 \text{ g}/m_{\text{H}} = 5,91 \times 10^{23}$. Questo schema di ragionamento non è l'unico possibile: ovviamente la misura fatta fornisce risultati che dipendono dalle variabili che si assumono come note. Il valore ottenuto è abbastanza vicino al valore standard $6,02 \times 10^{23}$; non abbiamo ritenuto opportuno gravare la trattazione con il calcolo dell'errore anche perché il serbatoio di accumulo dell'idrogeno non è uno strumento di misura preciso e inoltre non è possibile misurare la pressione a cui si sviluppa l'idrogeno; ci siamo accontentati di aver ottenuto una stima ragionevole della grandezza.

Per quanto riguarda l'energia di legame dell'acqua, essa viene determinata dal rapporto tra l'energia fornita dal pannello E e la massa d'acqua dissociata m . In tabella 2 sono riportati i valori misurati $N = Q/e$ del numero di atomi di idrogeno prodotti.

Δt (s)	206	198	206	140	142	144
N	$2,46 \times 10^{20}$	$2,40 \times 10^{20}$	$2,51 \times 10^{20}$	$2,49 \times 10^{20}$	$2,50 \times 10^{20}$	$2,50 \times 10^{20}$
m (g)	$3,67 \times 10^{-3}$	$3,59 \times 10^{-3}$	$3,75 \times 10^{-3}$	$3,72 \times 10^{-3}$	$3,74 \times 10^{-3}$	$3,74 \times 10^{-3}$
E (J)	63,0	61,8	64,2	64,0	64,1	64,4
E/m (kJ/g)	17,2	17,2	17,1	17,2	17,1	17,2

Tabella 2. Misure di energia.

Tenendo presenti i rapporti stechiometrici tra idrogeno atomico e acqua, si è determinata la massa di acqua dissociata $m = PM_{\text{acqua}} N/(2N_{\text{A}})$, essendo $PM_{\text{acqua}} = 18 \text{ g/mol}$. L'energia elettrica assorbita dalla cella PEM1 nei diversi intervalli di tempo è stata calcolata integrando la potenza elettrica, ovvero il prodotto tra corrente e tensione misurate. Ne segue una stima dell'energia di legame dell'acqua di $E/m = 17 \text{ kJ/g}$. Il risultato ottenuto è minore di quello standard 25 kJ/g (vedi Branko Ruscic *et al.*, *J. Phys. Chem. A*, 2002, 106 (11), p. 2727–2747): secondo noi questa discrepanza è dovuta alla presenza dei catalizzatori nella cella PEM1 che abbassano l'energia di attivazione della reazione.

Per determinare il rendimento del pannello fotovoltaico è stata studiata la sua risposta in corrente e tensione alla radiazione solare in una giornata non del tutto serena.

I grafici mostrano una chiara correlazione tra l'intensità della luce ricevuta dal pannello misurata in lux e la corrente erogata dal pannello, dove le variazioni nel tempo dipendono dal passaggio di nuvole davanti al disco solare, mentre la tensione erogata si mantiene sostanzialmente costante.

Il rendimento del pannello si ricava dal fit eseguito sul grafico potenza elettrica versus potenza luminosa e risulta essere circa del 10%. Per poter confrontare il valore della potenza elettrica con quella luminosa è stato necessario trovare il modo di convertire in W/m^2 la misura dell'intensità luminosa fornita in lux dal sensore di luce (vedi appendice).

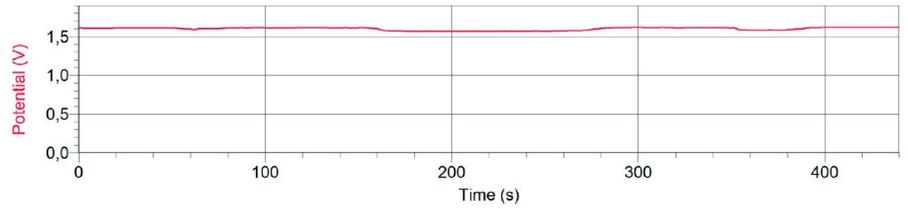


Figura 5. Tensione erogata dal pannello.

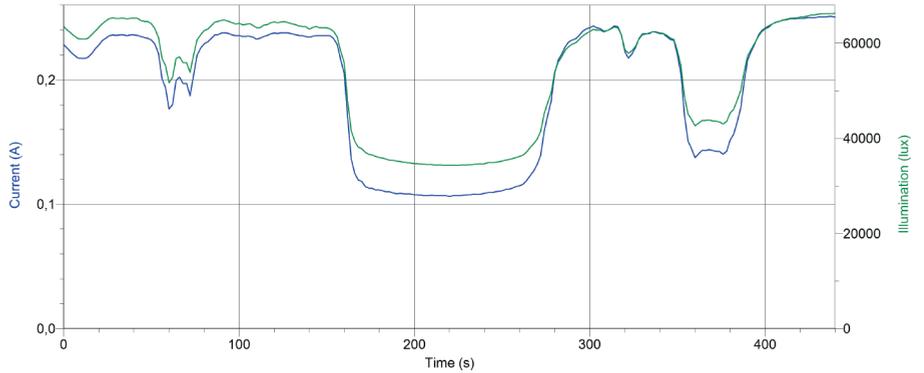


Figura 6. Confronto tra illuminazione ricevuta e corrente erogata dal pannello.

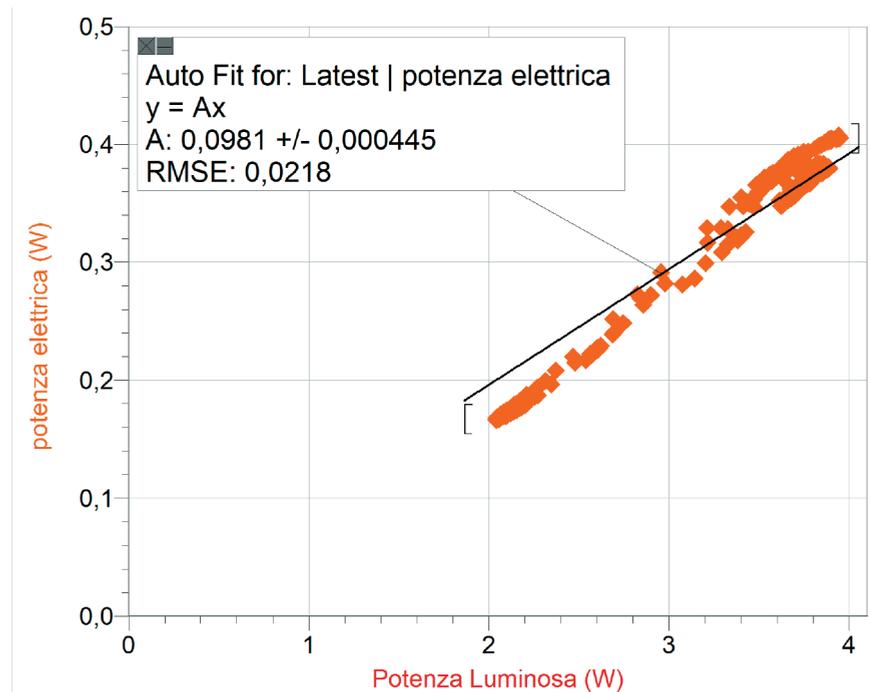


Figura 7. Rendimento del pannello.

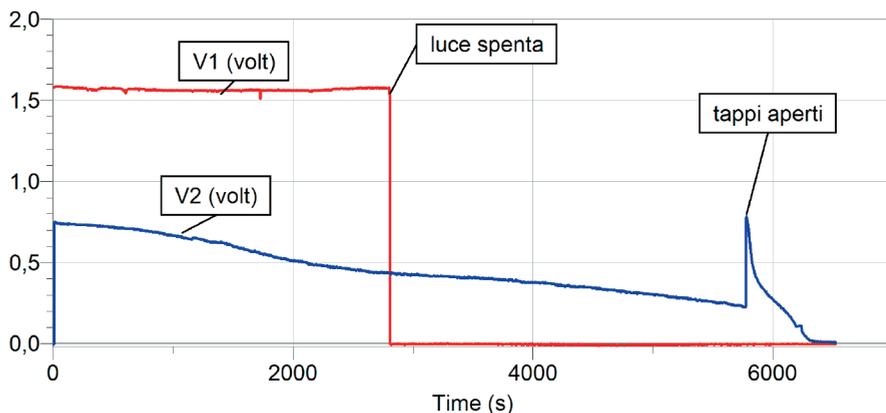


Figura 8. Andamenti temporali delle tensioni ai capi delle celle PEM.

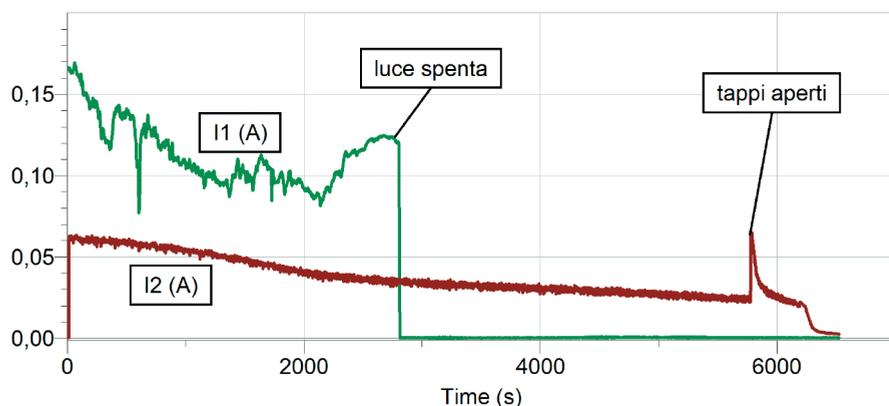


Figura 9. Andamenti temporali delle correnti ai capi delle celle PEM.

Il rendimento dello stoccaggio dell'idrogeno è definito come il rapporto tra l'energia in ingresso nella cella PEM1 (che genera i gas) e l'energia in uscita dalla cella PEM2 (nella quale avviene la loro ricombinazione), relativamente allo stesso intervallo di tempo. Con i dati di tensione e di corrente rilevati dai sensori è stato possibile costruire un grafico delle potenze in ingresso ed in uscita, il cui integrale definito sul medesimo intervallo di tempo fornisce il valore delle energie da mettere in relazione per calcolare il rendimento.

I picchi che sono presenti nella parte finale dell'intervallo di rilevazione corrispondono alla apertura dei tappi che mettono in comunicazione la cella a combustibile PEM2 con l'ambiente; questa operazione comporta un temporaneo aumento del flusso dei gas dai serbatoi verso la cella e quindi una accelerazione della produzione di energia.

Considerando il rapporto tra l'energia in uscita 120 J e l'energia in ingresso 500 J si ottiene un rendimento pari al 24% per il processo dello stoccaggio dell'idrogeno. Un'ultima osservazione: staccando l'alimentazione della cella PEM1 il ventilatore continua a girare per diversi minuti, rendendo evidente il fenomeno dello stoccaggio dell'energia chimica nell'idrogeno gassoso.

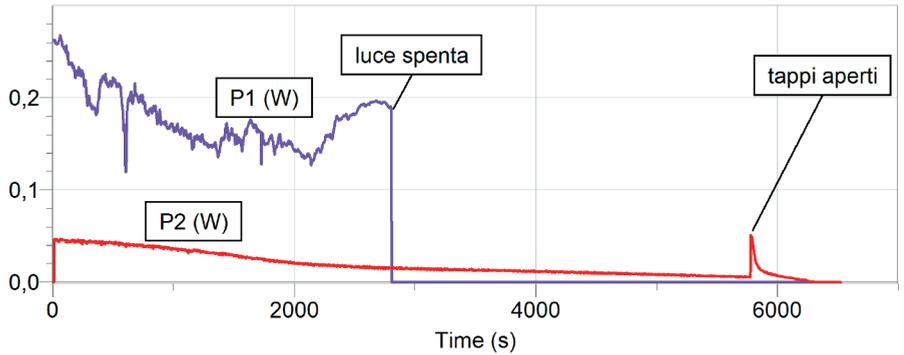


Figura 10. Andamenti temporali delle potenze in ingresso e uscita.

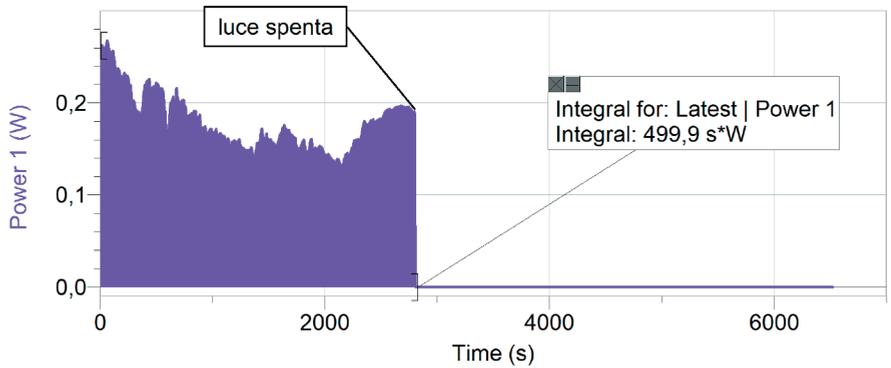


Figura 11. Integrale della potenza in ingresso (energia).

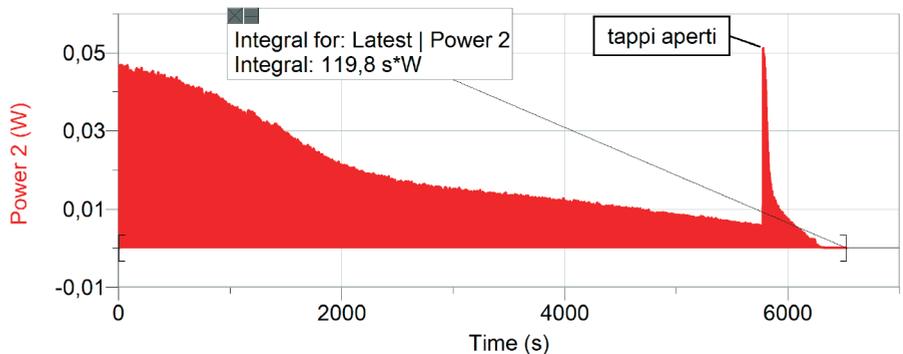


Figura 12. Integrale della potenza in uscita (energia).

Appendice: la conversione delle unità di misura dell'intensità luminosa

I sensori di luce, in misura assai maggiore che altri sensori (di forza, di temperatura, di distanza, di tensione o corrente elettrica...) richiedono specifiche competenze tecniche per essere usati in modo appropriato. E lo studio delle caratteristiche di sensori e del loro corretto utilizzo può essere un modo efficace, divertente e naturale per affrontare percorsi interdisciplinari, che in altro modo potrebbero risultare artificiosi e forzati.

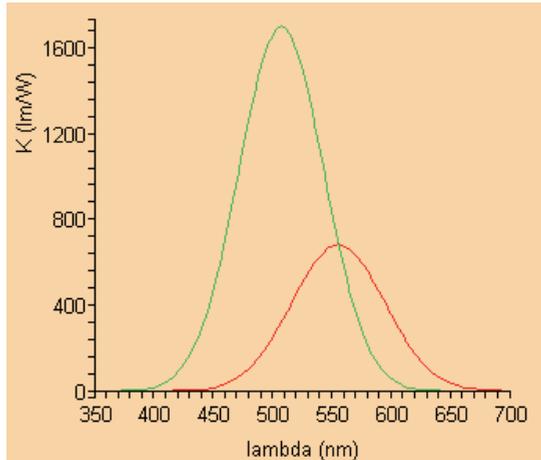


Figura A1. fattore di visibilità. Con “fattore di visibilità” s’intende la sensibilità dei recettori oculari; le curve rappresentano le sensibilità dei coni (responsabili per la visione diurna, meno sensibili) e dei bastoncelli (visione notturna, più sensibili).

Un sensore di luce è un dispositivo che viene usato per rivelare e misurare l’intensità luminosa (fornendo un segnale elettrico ad esso correlato). Va innanzitutto definito allora cosa si intende con il termine *intensità luminosa*. Cominciamo a definire il flusso luminoso Φ : è “l’energia emessa, ricevuta o trasportata, per unità di tempo, da onde elettromagnetiche la cui lunghezza d’onda sia compresa tra i limiti dello spettro visibile all’occhio umano medio”. Tali limiti sono $\lambda_1=380$ nm e $\lambda_2=780$ nm. L’intensità luminosa I è definita come il rapporto $I=\Phi/S$ essendo S la compo-

nente perpendicolare alla direzione di propagazione della superficie del corpo investito dalla luce. Tuttavia l’intensità luminosa non si misura in W/m^2 . E questo per motivi strettamente biologici, perché l’occhio umano non solo è sensibile soltanto ad una ristrettissima parte della radiazione elettromagnetica, ma ha anche una sensibilità che è fortemente modulata nel piccolo intervallo della luce visibile. Di conseguenza per l’intensità luminosa è necessaria una diversa unità di misura: il lux. Ed effettivamente il sensore di luce da noi utilizzato è tarato in lux. La misura del flusso luminoso associata al lux è il lumen (lm), definito da $1 \text{ lm} = 1 \text{ lux} \times m^2$.

Le indagini statistiche mostrano che la grande maggioranza degli esseri umani abbia una sensibilità alle diverse lunghezze d’onda descrivibile dalle curve riportate in figura A1.

In condizioni di buona luce, diciamo di giorno alla luce del sole, il massimo (683 lm/W) della sensibilità dell’occhio medio si ha a 555 nm (curva fotopica); in condizioni di luce scarsa, diciamo di notte alla luce lunare, il massimo (1700 lm/W) della sensibilità dell’occhio medio si sposta a 507 nm (curva scotopica). Il fattore di visibilità $K(\lambda)$ si annulla in pratica al di fuori dello spettro visibile.

Nella visione fotopica i fotorecettori (celle sensoriali dell’occhio presenti nella retina) sono i coni che consentono la visione cromatica ed un’alta acutezza visiva; essi sono in numero inferiore (7 milioni contro 120 milioni) ai bastoncelli, i fotorecettori attivi nella visione scotopica che consentono la visione acromatica con bassa acutezza visiva.

Per una luce monocromatica di lunghezza d’onda λ la potenza $\Phi(\lambda)$ espressa in lm è pari al fattore di visibilità $K(\lambda)$ espresso in lm/W per la potenza trasportata dalla radiazione $P(\lambda)$ espressa in watt, ossia $\Phi(\lambda) = K(\lambda)P(\lambda)$.

Nella realtà la luce non è monocromatica, e quindi il sensore misura la potenza complessiva trasportata dalla radiazione elettromagnetica, ossia l’integrale

$$\Phi_T = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} K(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda$$

essendo $\lambda_1 = 380 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 780 \text{ nm}$ i limiti della spettro visibile all'occhio umano medio, ed essendo $\rho(\lambda) = dP/d\lambda$ la distribuzione della potenza in dipendenza della lunghezza d'onda.

Il fattore di conversione K_{eff} si ottiene imponendo che $\Phi_T = K_{\text{eff}}P$. Nota la misura di I in lux fornita dal sensore risulta $\Phi_T = IS$ onde segue $P = IS/K_{\text{eff}}$ essendo

$$K_{\text{eff}} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} K(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \rho(\lambda)d\lambda}.$$

Per calcolare K_{eff} occorre conoscere l'andamento analitico del fattore di visibilità $K(\lambda)$ per l'occhio medio e occorre fare delle ipotesi su $\rho(\lambda)$. Per quanto riguarda $K(\lambda)$ la figura A1 suggerisce che $K(\lambda)$ abbia un andamento gaussiano

$$K(\lambda) = K_{\text{max}}e^{-a^2(\lambda-\Lambda)^2/\Lambda^2}$$

essendo $K_{\text{max}} = 683 \text{ lm/W}$ con $\Lambda = 555 \text{ nm}$, $a = 10$ (fattore adimensionale di ampiezza). Per quanto riguarda la distribuzione della potenza in dipendenza della lunghezza d'onda, l'approssimazione più semplice è che $\rho(\lambda)$ sia costante e pari a ρ_m nell'intervallo di lunghezze d'onda considerato. In tal caso si ottiene facilmente la potenza luminosa in watt $P_m = \Phi_T/K_m$ essendo

$$K_m = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} K(\lambda)d\lambda.$$

Tenendo presente che la funzione $K(\lambda)$ si annulla esternamente all'intervallo $[\lambda_1, \lambda_2]$, risulta

$$K_m = \frac{\Lambda K_{\text{max}}}{a(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}\Lambda K_{\text{max}}}{2a(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

Nel caso della visione fotopica otteniamo infine il fattore di conversione $K_m = 84 \text{ lm/W}$ che è quello da noi utilizzato nell'elaborazione dei dati.