



Andrea Sconza*,
Giacomo Torzo*[†]

* Dipartimento
di Fisica,
Università di Padova
[†] ICIS-CNR, Padova

Un esperimento meccanico ed uno elettrico sul caos deterministico

(Pervenuto il 28.3.2008, approvato il 30.5.2008)

ABSTRACT

Introduzione

Le oscillazioni forzate di un sistema descrivibile mediante le equazioni *deterministiche* classiche che sia soggetto a forze *non lineari* possono risultare *caotiche*, cioè avere evoluzioni temporali imprevedibili in quanto fortemente dipendenti da piccolissime variazioni nelle condizioni iniziali (fenomeno che è stato definito *caos deterministico*).

Il modello matematico più semplice di oscillazioni forzate non lineari è fornito dalla equazione di Duffing (si veda [1] e [2]):

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \varepsilon \frac{dz}{dt} + \alpha z + \beta z^3 = \frac{F}{M} \cos(\omega t), \quad (1)$$

nella quale M è la massa oscillante ed F l'ampiezza della forzante. Nella (1) oltre ad una forza di richiamo lineare $-kz$ (proporzionale allo scostamento z dalla posizione di equilibrio, che nella equazione compare con coefficiente $\alpha = k/M$), c'è anche un termine di forza cubico in z (quindi *non lineare*) con coefficiente $\beta = k'/M$, e una forza resistente proporzionale alla velocità tramite il coefficiente εM .

Parte della fenomenologia connessa con l'equazione di Duffing (forma "distorta" della curva di risonanza e presenza di salti di ampiezza ed isteresi) è stata illustrata in [1] su un esempio molto semplice: le oscillazioni forzate di una pallina di ferro appesa ad una molla nel campo magnetico di due magneti anulari.

Per completare lo studio della (1), illustrando casi in cui il moto del sistema diventa caotico, occorre un sistema meccanico un po' più complesso, in cui risulti agevole aggiustare indipendentemente i diversi coefficienti della equazione: un esempio non troppo difficile da realizzare è il *pendolo torsionale asimmetrico* (cioè con una massa addizionale fuori dall'asse di rotazione).

Tale dispositivo è qui presentato nei §1 e §2; nel §3 sono riportati dati sperimentali per le due configurazioni possibili: il pendolo *normale* cioè con la massa addizionale *sotto* l'asse di rotazione e quello *invertito* cioè con la massa addizionale *sopra* l'asse di rotazione. Nel §4 sono mostrati i risultati di simulazioni numeriche dell'esperimento. Infine nel §5 viene illustrata la transizione al caos passando attraverso moti periodici di periodo multiplo intero del periodo della forzante e viene caratterizzato il moto caotico mediante mappe di Poincaré.

L'esperimento col pendolo torsionale asimmetrico ha una forte valenza didattica per la sua evidenza visiva e perchè può essere capito da chiunque abbia un minimo di confidenza con la meccanica delle rotazioni (cioè coi concetti di momento d'inerzia e momento delle forze applicate). Tuttavia la costruzione del dispositivo richiede una lavorazione precisa delle parti meccaniche, e lunghi tempi di acquisizione dati.

Il secondo esperimento invece (§6-§8), basato su un circuito elettronico la cui tensione d'uscita segue **esattamente** l'equazione di Duffing, è facile da montare, anche su bassetta di prova, è di veloce esecuzione, ma per la sua comprensione richiede una certa familiarità con l'elettronica analogica (amplificatori operazionali e moltiplicatori di tensione).

§ 1 Descrizione dell'apparato

Il pendolo elastico torsionale asimmetrico (figura 1) è costituito da un disco di ottone, che può ruotare attorno ad un perno orizzontale (raggio $r = 7$ mm), su cui è fissata una massa M in posizione eccentrica a distanza dall'asse R regolabile fra $R_{\min} = 4.3$ cm ed $R_{\max} = 6.4$ cm. Due molle poste lateralmente a destra e a sinistra dell'asse di rotazione agiscono sul perno tramite due fili avvolti in modo che i momenti delle due forze elastiche siano discordi; la loro trazione assieme con l'effetto del peso di M determina la posizione di equilibrio del sistema.

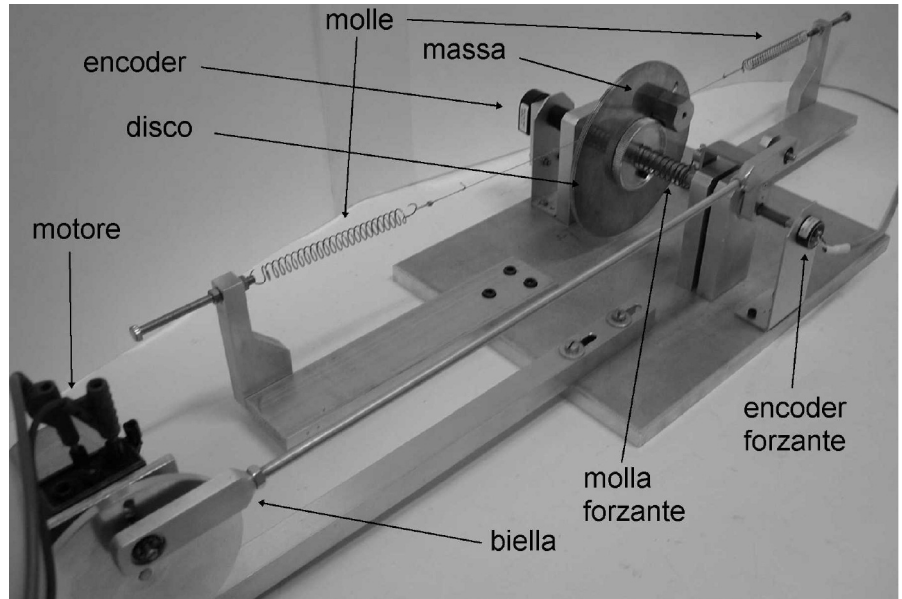


Figura 1. Il pendolo elastico torsionale

Il disco che porta la massa eccentrica può venir ruotato rispetto al perno (prima di essere bloccato su di esso mediante una ghiera a vite) e quindi si può ottenere che la posizione di equilibrio stabile ($\theta = 0$ in figura 2a) sia quella in cui la massa M sta esattamente al disotto dell'asse di rotazione sulla verticale passante per esso.

In questo caso (pendolo normale) l'equazione del moto, indicando con I il momento d'inerzia e con K_{eff} la costante elastica efficace si scrive:

$$I = \frac{d^2\theta}{dt^2} - MgR\sin\theta - K_{\text{eff}}\theta - 2\gamma \frac{d\theta}{dt} \quad (2)$$

supponendo il termine di attrito $-2\gamma d\theta/dt$ proporzionale alla velocità angolare.

Quando invece il disco viene ruotato in modo che la massa M sia posta sopra e sulla verticale dell'asse di rotazione (pendolo invertito) il momento delle forze elastiche, $-K_{\text{eff}}\theta$, tende a riportare il disco nella posizione $\theta = 0$ (figura 2b) mentre il momento del peso di M , che ora si scrive $+MgR\sin\theta$, tende a portarlo nella posizione diametralmente opposta.

L'equazione del moto è ora:

$$I = \frac{d^2\theta}{dt^2} + MgR\sin\theta - K_{\text{eff}}\theta - 2\gamma \frac{d\theta}{dt} \quad (3)$$

Si possono presentare due casi: se $MgR < K_{\text{eff}}$ si ha un'unica posizione di equilibrio con la massa M esattamente sulla verticale al disopra dell'asse di rotazione

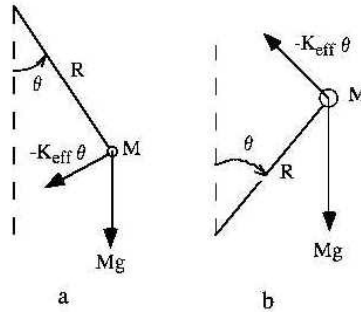


Figura 2. le forze agenti nel caso del pendolo normale (a) e di quello invertito (b)

($\theta = 0$), mentre se MgR supera K_{eff} si hanno due posizioni di equilibrio simmetriche¹ una a destra e l'altra a sinistra della verticale agli angoli

$$\theta_{1,2} \approx \pm \sqrt{6(1 - (K_{\text{eff}} / MgR))} \quad (4)$$

che si calcolano in maniera approssimata uguagliando il momento del peso al momento elastico e sviluppando il sin in serie di MacLaurin ($\sin \theta \approx \theta - 1/6 \theta^3$) o graficamente dall'intersezione della curva di sin con la retta $y = K_{\text{eff}} / (MgR)\theta$.

Nel nostro caso M è stata dimensionata in modo che quando $R = R_{\text{min}}$ siamo nella prima situazione (equilibrio a $\theta = 0$) mentre quando $R = R_{\text{max}}$ le posizioni di equilibrio stabile sono due.

L'angolo di rotazione del pendolo è misurato da un encoder ottico solidale con l'asse del dispositivo.

Per studiare le oscillazioni forzate si è fissato al disco di ottone un estremo di una molla elicoidale (avvolta attorno al perno di rotazione) il cui secondo estremo può venire fatto ruotare a destra e a sinistra, con frequenza ed ampiezza regolabili, tramite un motore in continua con riduttore ed un meccanismo a biella (figura 1). Il momento forzante esercitato sul pendolo da questa molla si scrive come $K\theta_m$ se indichiamo con K (Nm/rad) la sua costante di torsione e con θ_m l'angolo di rotazione dell'estremo della molla forzante. Tale angolo è misurato da un secondo encoder che questa volta è semplicemente un potenziometro circolare.

La rotazione dell'estremo della molla pilotato dal motore avviene con moto approssimativamente sinusoidale, di frequenza angolare ω e di ampiezza che indicheremo con θ_f , e quindi l'equazione del moto forzato del pendolo è:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \pm MgR \sin \theta - K_{\text{eff}}\theta - 2\gamma \frac{d\theta}{dt} + K\theta_f \cos \omega t \quad (5)$$

dove il segno + si riferisce al caso del pendolo invertito ed il segno - al caso del pendolo normale.

Occorre precisare che alla costante elastica efficace K_{eff} (momento torcente sviluppato dalle molle per radiante di rotazione del disco) contribuiscono sia le due molle laterali che la molla elicoidale. Il contributo delle molle laterali, dato che il braccio di queste due forze è il raggio r del perno e che l'allungamento delle molle si esprime in funzione dell'angolo come $r\theta$, è $(k_1 + k_2)r^2$, e in definitiva:

$$K_{\text{eff}} = (k_1 + k_2)r^2 + K.$$

L'equazione (5) diventa l'equazione di Duffing se dividiamo tutto per I e sostituiamo il $\sin\theta$ con la sua approssimazione ($\theta - \theta^3/6$) (accettabile per angoli fino a circa 60 gradi). Infatti con le posizioni:

$$\alpha = (K_{\text{eff}} \pm MgR) / I, \quad \beta = \mp MgR / (6I), \quad \varepsilon = 2\gamma / I, \quad F = K\theta_1 / I, \quad (6)$$

(dove ora il segno superiore si riferisce al caso del pendolo normale ed il segno inferiore al caso del pendolo invertito) l'equazione del moto assume la forma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha\theta + \beta\theta + \varepsilon \frac{d\theta}{dt} = F \cos \omega t. \quad (7)$$

Ci aspettiamo allora che per ogni ampiezza A di oscillazione stazionaria, cioè dell'oscillazione stabile che si osserva quando il transitorio si è esaurito, siano possibili *due diverse* frequenze angolari $\omega_{1,2}$ legate ad A dalla condizione di Duffing:

$$(\omega^2 - \alpha - \frac{3}{4}\beta A^2)^2 + \omega^2 \varepsilon^2 = F^2 / (MA)^2 \quad (8)$$

che risolta in ω diventa:

$$\omega_{1,2}^2 = (\alpha + 3/4\beta A^2 - \varepsilon^2/2) \pm \sqrt{\varepsilon^4 / 4 - \varepsilon^2(\alpha + 3/4\beta A^2) + F^2 / A^2}. \quad (8')$$

Per le oscillazioni libere dovrà invece essere verificata la:

$$\omega^2 = \alpha + 3/4\beta A^2. \quad (9)$$

La stessa teoria approssimata prevede per lo sfasamento ϕ fra l'oscillazione stazionaria e la forzante la legge:

$$\text{tg}\phi = \frac{\varepsilon\omega}{\alpha - \omega^2 + 3/4\beta A^2}. \quad (10)$$

La relazione (10), fornisce due valori ϕ corrispondenti ai due valori $\omega_{1,2}$, che si ricavano dalla (8'), per ogni ampiezza A .

§ 2 Determinazione delle costanti dell'apparecchio

Occorre determinare le tre costanti elastiche k_1 , k_2 , K , il momento d'inerzia I e la costante di smorzamento ε .

I valori dei primi due parametri si ottengono misurando l'allungamento delle molle laterali sotto l'azione di carichi noti: nel nostro caso $k_1 + k_2 = (629 \pm 9)$ N/m

Il momento di inerzia si calcola pesando tutti i pezzi che compongono il pendolo elastico e misurando i parametri geometrici. L'attendibilità di questo calcolo è stata controllata confrontando il valore ottenuto col valore sperimentale ricavato dalla misura del periodo delle oscillazioni libere del pendolo senza massa eccentrica e con le sole molle laterali (di cui si conoscono le costanti elastiche). Il momento d'inerzia totale calcolato senza la massa eccentrica² vale $I_{\text{totale}} = (1.866 \pm 0.056) 10^{-3}$ kg m², e quello ricavato dalla misura del periodo vale $I_{\text{sper}} = (k_1 + k_2)r^2 (T_2/2\pi)^2 = (1.86 \pm 0.09) 10^{-3}$ kg m².

Fissando sul disco alla distanza minima $R = R_{\text{min}} = (4.3 \pm 0.1)$ cm una massa $M = 107.1$ g si ottiene³: $I_{\text{totale}} = (1.975 \pm 0.059) 10^{-3}$ kg m² e $MgR = (0.042 \pm 0.001)$ Nm.

La determinazione diretta della costante di torsione K della molla elicoidale che si usa per forzare le oscillazioni non è agevole per cui l'abbiamo ricavata indirettamente confrontando i periodi delle oscillazioni libere dell'apparato, senza alcuna massa eccentrica, provocate o dalle sole molle laterali o dalla sola molla elicoidale.

Nelle oscillazioni libere del disco, senza la massa eccentrica, richiamato verso la posizione di equilibrio dalla sola molla elicoidale, lo pseudoperiodo vale $T_1 = 2.12 \pm 0.03$ s. Lo pseudoperiodo delle oscillazioni sostenute dalle sole due molle laterali vale $T_2 = (1.488 \pm 0.008)$ s. Il rapporto fra le due "costanti elastiche" (K della molla elicoidale e $(k_1 + k_2)r^2$ per la molle laterali) deve essere uguale al quadrato del rapporto inverso dei periodi.

Ne consegue che $K = (1.63 \pm 0.06) 10^{-2} \text{ Nm/rad}$, e $K_{\text{eff}} = (4.9 \pm 0.1) 10^{-2} \text{ Nm/rad}$.

Registrando l'ampiezza ed i tempi delle oscillazioni libere del disco senza massa eccentrica si trova l'andamento di figura 3, che male si adatta ad una interpolazione con una esponenziale unica come vorrebbe il modello dell'equazione di Duffing.

Le oscillazioni a piccola ampiezza, si attenuano in modo quasi lineare (indicando la presenza di attrito indipendente dalla velocità).

Dovendo usare un modello con solo attrito proporzionale alla velocità si ha $\gamma/I \approx 0.18$ e quindi $\varepsilon = 2\gamma/I = 0.36 \text{ s}^{-1}$. Non forniamo qui l'incertezza su ε dato che lo smorzamento non è in realtà puramente esponenziale.

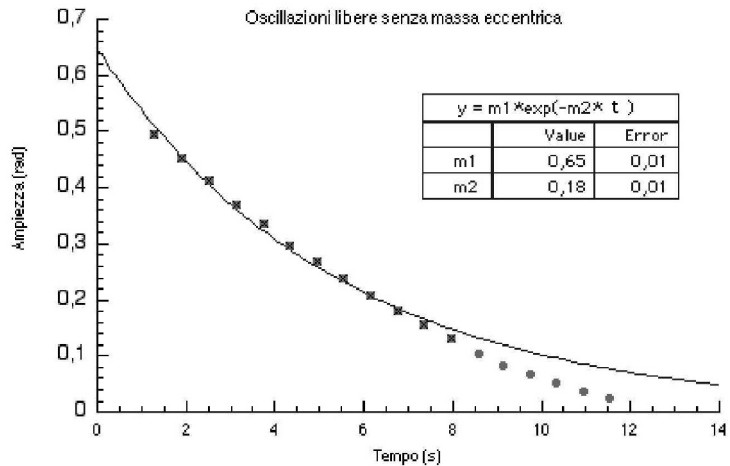


Figura 3. Oscillazioni libere del pendolo di torsione senza massa eccentrica.

Con i valori calcolati (con $R = R_{\text{min}}$) dei parametri k_1 , k_2 , K , I e ε , si possono prevedere i valori dei coefficienti α e β dell'equazione di Duffing (7).

A) Pendolo normale :

$$\alpha_{\text{norm}} = [K_{\text{eff}} + MgR] / I = (46.3 \pm 1.6) \text{ s}^{-2}$$

$$\beta = -MgR/(6 I) = -(3.5 \pm 0.2) \text{ s}^{-2}$$

B) Pendolo invertito :

$$\alpha_{\text{inv}} = [K_{\text{eff}} - MgR] / I = (3.7 \pm 1.0) \text{ s}^{-2}$$

$$\beta = +MgR/(6 I) = +(3.5 \pm 0.2) \text{ s}^{-2}$$

§ 3 Raccolta ed analisi dei dati sperimentali⁴

Abbiamo studiato dapprima le oscillazioni libere smorzate in cui la frequenza dipende fortemente dall'ampiezza, successivamente le oscillazioni forzate con piccoli valori della forzante per stabilizzare il sistema, dopo il transitorio, su un moto sincrono con la forzante (oscillazioni cosiddette *armoniche*). In queste condizioni si manifestano in maniera vistosa i fenomeni dei *salto d'ampiezza* e *dell'isteresi*. Abbiamo anche misurato lo sfasamento fra l'oscillazione stazionaria e la forzante.

Infine abbiamo verificato, nel caso del pendolo invertito, che diminuendo la frequenza della forzante si producono dapprima oscillazioni *subarmoniche* (cioè di periodo multiplo intero di quello della forzante) e quindi si ha la *transizione al caos*.

L'esperimento inizia confrontando le previsioni basate sulla stima dei parametri dell'apparato e sulle equazioni approssimate (8) e (9) con i dati sperimentali ottenuti studiando sia le oscillazioni libere che quelle forzate, prima nel caso del pendolo normale e poi in quello del pendolo invertito. Naturalmente ci si deve attendere che le soluzioni approssimate delle soluzioni delle eq. 8 e 9 possano riprodurre i dati sperimentali solo per ampiezze modeste (al più fino a ≈ 90 gradi). Per simulare il moto ad ampiezze maggiori abbiamo eseguito una integrazione numerica delle equazioni esatte del moto (equazioni differenziali 5), utilizzando il software di modellizzazione *Stella Research 5.1.1* (i risultati sono illustrati nel § 4).

A) Pendolo Normale, oscillazioni libere

In figura 4 sono riportati i valori sperimentali del quadrato della frequenza angolare ω in funzione della ampiezza A , insieme alla curva che rappresenta la previsione teorica (relazione 9) calcolata coi valori nominali di α e β .

Lo (pseudo)periodo $T = 2\pi/\omega$ diminuisce, al calare dell'ampiezza A , all'incirca come prevede la (9) coi valori nominali di α e β . Il punto alla minima ampiezza scarta perchè è fortemente influenzato dall'attrito.

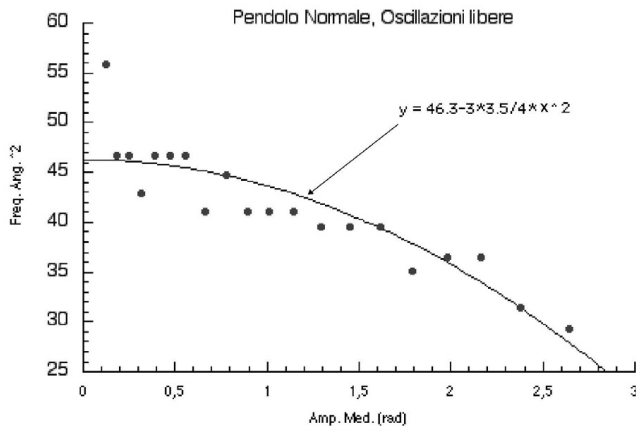


Figura 4. La frequenza angolare al quadrato (asse y) in funzione dell'ampiezza (asse x).

B) Pendolo Normale, oscillazioni forzate

Abbiamo prodotto le oscillazioni forzate pilotando la molla elicoidale con una ampiezza di oscillazione del suo estremo pari a circa 0.6 radianti. Variando gradualmente la frequenza della forzante per valori crescenti o decrescenti ed attendendo ogni volta che l'oscillazione si stabilizzi si osserva il fenomeno dei salti di ampiezza e dell'isteresi nella "curva di risonanza".

In figura 5 sono presentati i dati sperimentali (cerchi +) e la previsione teorica approssimata (punti ed x) calcolata mediante l'equazione (8'), usando per il termine di forzante F il valore $F = K \theta_f / I = (5.0 \pm 0.3) \text{ s}^{-2}$. I cerchi rappresentano valori misurati a frequenza crescente e i + valori misurati a frequenza decrescente.

La figura 5 mostra che l'accordo della previsione teorica approssimata con i dati sperimentali è buono per ampiezze fino a circa 2 radianti con valori dei parametri molto vicini a quelli nominali. Si può anche ottenere un migliore accor-

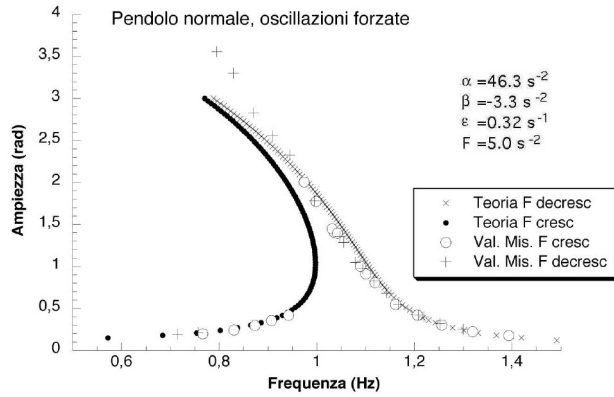


Figura 5. Curva di risonanza del pendolo normale: confronto tra dati sperimentali e modello teorico con valori dei parametri prossimi a quelli nominali.

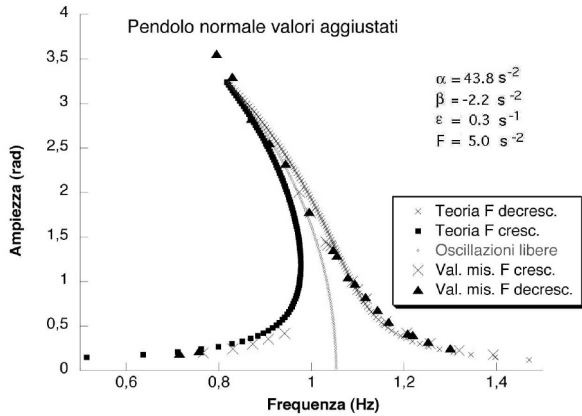


Figura 6. Curva di risonanza calcolata con i valori indicati. La curva intermedia è la relazione frequenza-ampiezza per le oscillazioni libere.

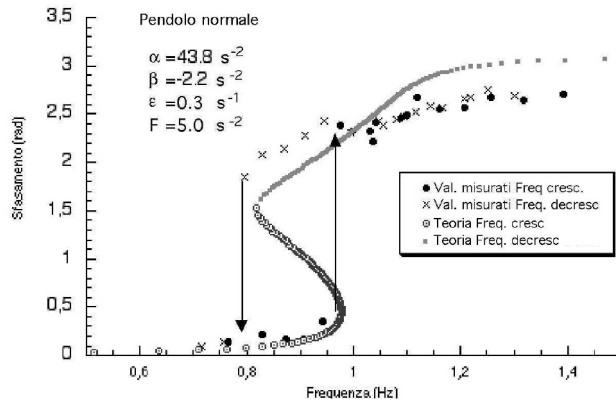


Figura 7. Confronto tra i valori misurati per gli sfasamenti e i valori previsti dal modello approssimato (eq.10).

do alle grandi ampiezze (figura 6) a patto di ridurre un poco i parametri α e β .

La curva delle oscillazioni libere, calcolata mediante la (9) e con i valori indicati dei parametri si inserisce bene fra le due curve delle oscillazioni forzate.

Abbiamo anche misurato al variare della frequenza della forzante e visualizzando su un oscilloscopio i segnali dei due encoders, lo sfasamento fra l'oscillazione stazionaria e la forzante (figura 7).

Sostanzialmente si osserva che si passa da oscillazioni in fase con la forzante a frequenza inferiore a quella di "risonanza" ad oscillazioni in controfase a frequenze superiori.

Lo sfasamento teorico viene calcolato con la formula (10) nel modo seguente: si sceglie un'ampiezza A , si calcolano le due possibili frequenze usando le relazioni (8') e da queste i due valori dello sfasamento.

C) Pendolo Invertito, oscillazioni libere

Le oscillazioni libere del pendolo invertito si smorzano molto più rapidamente che non quelle del pendolo normale (perchè la forza di richiamo complessiva è ora la *differenza* e non più la *somma* di quella elastica e quella di gravità): per poter registrare almeno 4 o 5 oscillazioni occorre partire da una ampiezza iniziale di quasi 4 radianti per cui la previsione approssimata (equazione 9), non può essere molto precisa. Si riesce ad avere un discreto accordo soltanto riducendo β ed aumentando α rispetto ai valori nominali.

Infatti i valori di α e β ottenuti interpolando i dati sperimentali (come figura 8) con la relazione (9) sono rispettivamente $\alpha = (6.4 \pm 1.0) \text{ s}^{-2}$ e $\beta = (1.8 \pm 0.2) \text{ s}^{-2}$.

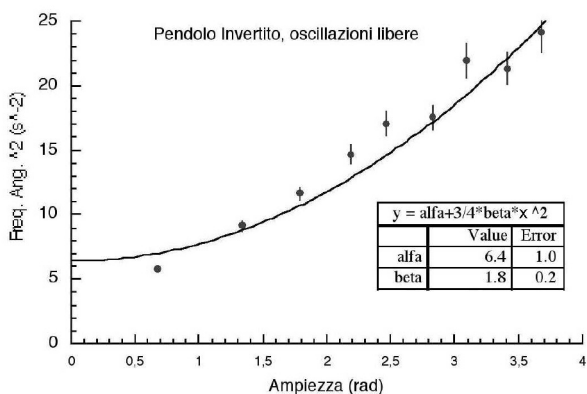


Figura 8. La frequenza angolare al quadrato (asse y) in funzione dell'ampiezza (asse x) per il pendolo invertito. I dati sperimentali sono interpolati con la relazione (9).

D) Pendolo Invertito, oscillazioni forzate

L'ampiezza del movimento oscillatorio dell'estremo pilotato della molla elicoidale è lo stesso usato per il caso del pendolo normale (circa 0.6 radianti).

I dati sperimentali si accordano con la (8) solo alle piccole ampiezze se si usano per α e β i valori nominali. Usando i valori ricavati dal *best fit* delle oscillazioni libere (figura 8) si ottiene invece il grafico mostrato in figura 9.

Il confronto tra sfasamenti (fra l'oscillazione e la forzante) sperimentali e previsti dalla equazione di Duffing è mostrato in figura 10.

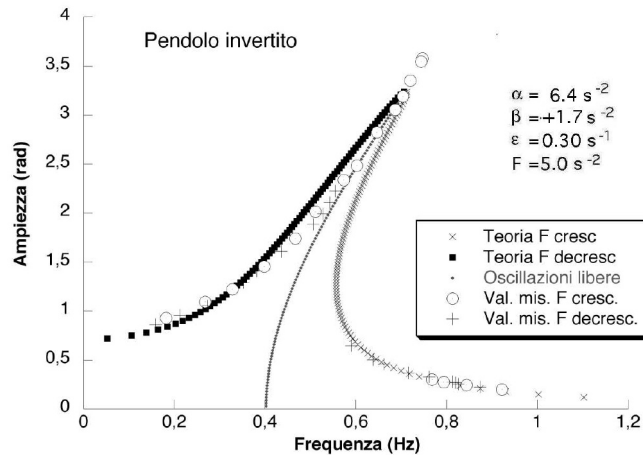


Figura 9. Curva di risonanza del pendolo invertito: confronto tra valori misurati e valori calcolati con il modello teorico e con i parametri ottenuti dal best fit di figura 8.

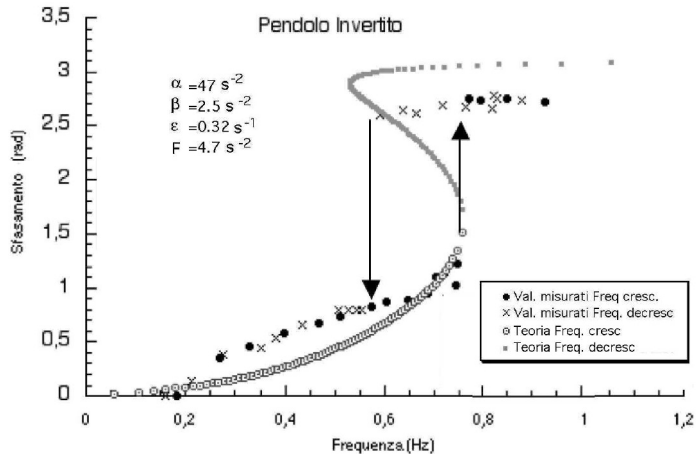


Figura 10. Confronto tra i valori misurati per gli sfasamenti e i valori previsti dal modello approssimato (eq.10).

§ 4 Simulazioni numeriche

Il software *Stella Research* può integrare numericamente le equazioni (5) col metodo di Runge-Kutta del quarto ordine. I valori dei parametri usati nella simulazione sono:

$$MgR/I = 20.6 \text{ s}^{-2} \quad K_{\text{eff}}/I = 25.0 \text{ s}^{-2} \quad 2\gamma/I = 0.35 \text{ s}^{-1} \quad K\theta_i/I = 4.8 \text{ s}^{-2}.$$

Un intervallo temporale di 5ms fra una iterazione e la successiva si è dimostrato sufficientemente piccolo per riprodurre fedelmente la soluzione nel caso risolubile analiticamente delle oscillazioni armoniche smorzate.

La simulazione viene ripetuta per diversi valori della frequenza angolare ω della forzante e con condizione iniziale fissata, per esempio $\theta(t=0) = 1$ e $\dot{\theta}(t=0) = 0$, si memorizza l'ampiezza della oscillazione stabile (dopo almeno 50 periodi della forzante). In questo modo si riesce a riprodurre uno dei rami della curva di risonanza, per esempio quello per frequenze crescenti; cambiando opportunamente le condizioni iniziali (per tentativi) si riproduce l'altro ramo. I risultati sono presentati (linee continue) nella figura 11 (insieme con i dati sperimentali).

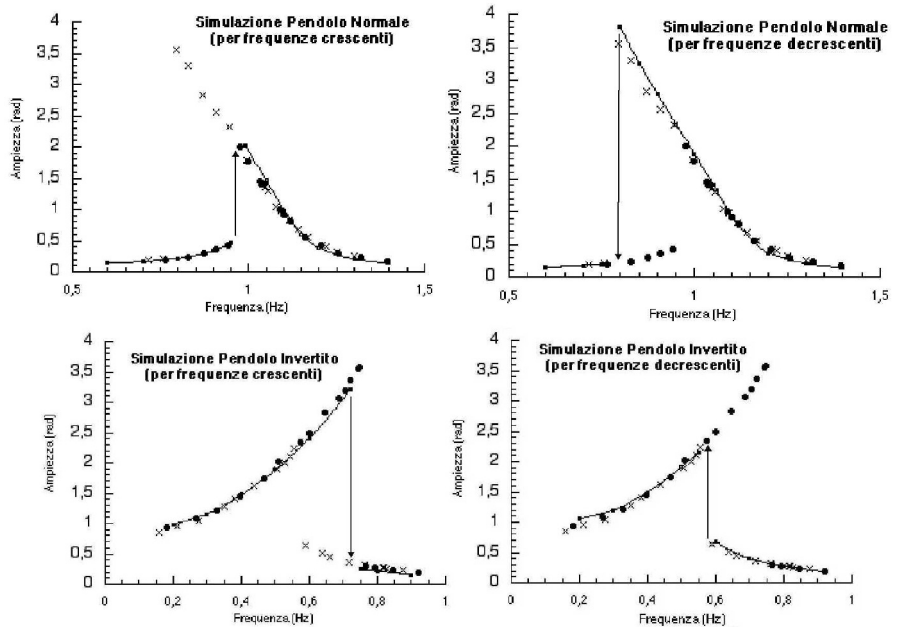


Figura 11. Simulazione ottenuta per integrazione numerica con Stella della curva di risonanza per il pendolo normale (in alto) e per il pendolo invertito (in basso).

§ 5 La transizione al caos

Dai molti studi di simulazione numerica reperibili in letteratura ([4], [5], [6], [7]) emerge un comportamento generale dei sistemi non lineari retti dall'equazione di Duffing: quando si varia con continuità l'ampiezza f della forzante (ad una frequenza angolare fissata in prossimità della frequenza propria $\omega_0 = \sqrt{\alpha}$), per ampiezze molto piccole il sistema si stabilizza su un moto periodico con la frequenza della forzante (*oscillazione armonica*); superato un certo valore, $f > f_1$, l'oscillazione stazionaria è di periodo doppio rispetto a quello della forzante; e continuando ad aumentare la f si ha tutta una cascata di successive duplicazioni di periodo in corrispondenza a certi valori f_2, f_3, \dots, f_n sempre più vicini l'uno all'altro che convergono verso un valore limite f_c .

Per valori di f maggiori di f_c il sistema non si stabilizza più su un'oscillazione periodica ma ha invece un moto non periodico (moto caotico) che per piccolissime variazioni nelle condizioni iniziali evolve in modi molto diversi e praticamente imprevedibili.

Si può rappresentare questo comportamento mediante un grafico delle biforcazioni come quello mostrato in figura 12, tratto da [5], che si riferisce al caso con $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ (il caso del pendolo invertito con $MgR > K_{\text{eff}}$).

In ascissa è riportata l'ampiezza della forzante f' ed in ordinata lo scostamento x dalla posizione d'equilibrio osservato in un punto fisso di ogni periodo della forzante (in unità ridotte adimensionali, si veda Appendice I⁵): fino ad $f = 0.34$ il moto stazionario è una piccola oscillazione attorno ad una delle due possibili posizioni d'equilibrio, in questo caso⁶ quella ad $x = -1$ e quindi nel grafico compare un solo punto; per $0.34 < f < 0.35$ si presenta il primo *period doubling* per cui il grafico si biforca cioè in esso in corrispondenza ad un valore di f si hanno due diversi valori della x . Successivamente si osserva tutta una cascata di ulteriori bi-

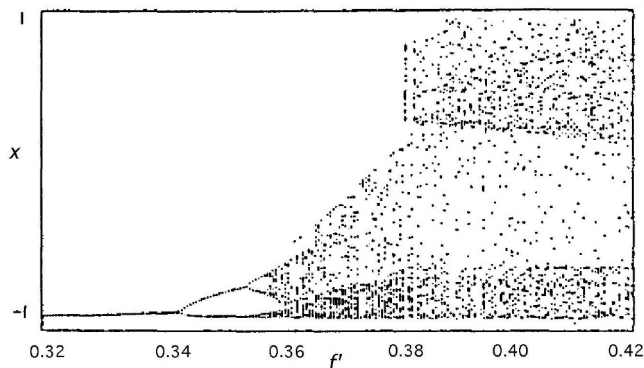


Figura 12. Grafico delle biforcazioni con $\alpha < 0$ e $\beta > 0$.

forcazioni (*oscillazioni subarmoniche di ordine n*) il periodo dell'oscillazione stazionaria diviene T_f^n , se T_f è il periodo della forzante, fino ad un valore critico dell'ampiezza $f_c = 0.36$, oltre il quale si hanno moti caotici.

Anche se in regime caotico il moto del pendolo non è periodico, ci sono delle regolarità di comportamento che appaiono se si rappresenta il moto nella *mappa di Poincaré*: questa è un grafico nello spazio delle fasi bidimensionale $(\theta, \dot{\theta})$ (posizione angolare e velocità angolare) in cui vengono riportati i punti di coordinate $(\theta, \dot{\theta})$ rilevati una volta per ogni periodo della forzante (per esempio quando la forzante è al valore massimo positivo). Nel caso di una oscillazione armonica è chiaro che la mappa di Poincaré si riduce ad un punto, per le oscillazioni subarmoniche di ordine n si avranno n punti mentre per un moto caotico il numero di punti sulla mappa diverge. Questi punti tuttavia non sono distribuiti a caso nel piano $(\theta, \dot{\theta})$, ma formano una figura frattale, che prende il nome di *attrattore caotico* o *attrattore strano*.

Un esempio è riportato nella figura 13, presa da [4], che si riferisce al pendolo normale con frequenza ridotta $\omega' = 2/3$, parametro di smorzamento ridotto $\epsilon' = 1/4$ e forzante ridotta $f' = 3/2$.

Ma veniamo ai dati sperimentali. Col nostro apparato non è agevole variare con precisione l'ampiezza della forzante perchè occorre svitare e spostare il perno della biella lungo il raggio del disco solidale coll'asse del motore, mentre è immediato cambiare la tensione di alimentazione del motore e quindi la frequenza della forzante. Per questo motivo abbiamo preferito operare con ampiezza della

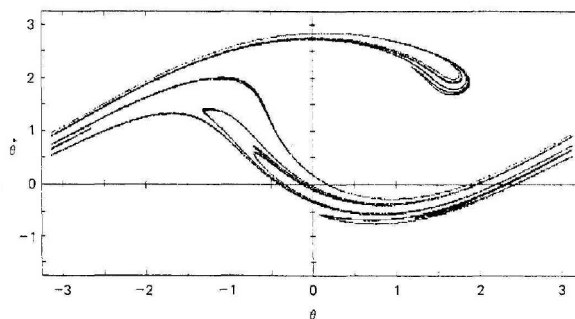


Figura 13. mappa di Poincaré per pendolo normale.

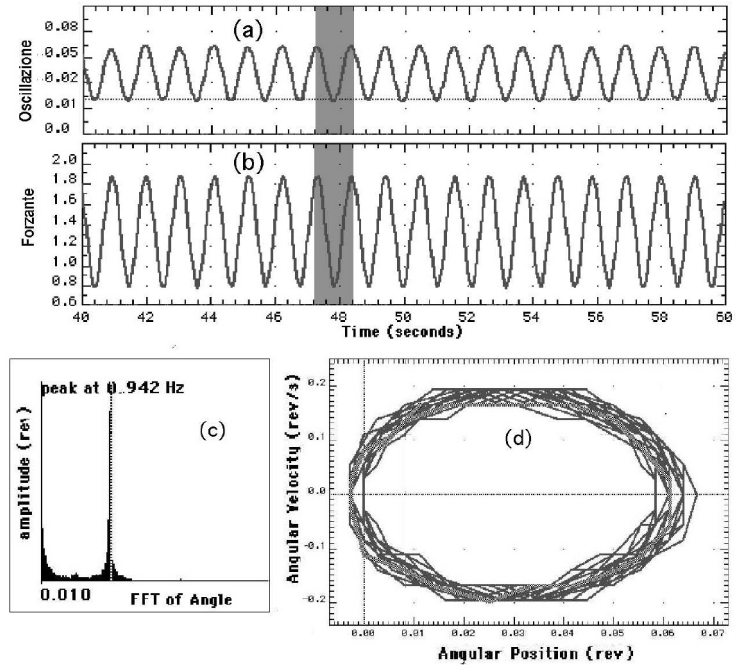


Figura 14. Moto armonico intorno ad una delle due posizioni d'equilibrio stabile: (a): angolo di rotazione del pendolo (espresso in frazioni di giro), (b): tensione d'uscita del potenziometro che misura la rotazione dell'estremo della molla forzante, (c): spettro di Fourier del moto, (d): diagramma nello spazio delle fasi.

forzante fissata a 0.57 radianti e cercare, aiutati dalle simulazioni eseguite con Stella, le frequenze alle quali si osservano dapprima solo oscillazioni armoniche (con periodo uguale a quello della forzante) e successivamente moltiplicazioni di periodo e infine moti caotici.

Abbiamo fissato la distanza della massa eccentrica a 5.9 cm, in modo che $MgR = 0.0588 \text{ Nm}$ sia maggiore di $K_{\text{eff}} = 0.0494 \text{ Nm}$: si hanno quindi due posizioni di equilibrio agli angoli $\theta_{1,2} = \pm \sqrt{6(1 - K_{\text{eff}} / (MgR))} \pm 0.98 \text{ rad}$.

Per frequenza della forzante $\nu = 0.94 \text{ Hz}$ ed ampiezza $A = 0.57 \text{ radianti}$ si ha una oscillazione alla stessa frequenza ν (figura 14).

Il grafico dello spazio delle fasi $(\theta, \dot{\theta})$ è semplicemente un anello (figura 14d).

Alla frequenza $\nu = 0.83 \text{ Hz}$, e sempre ampiezza $= 0.57 \text{ radianti}$, si osserva ancora una oscillazione periodica stabile ma con raddoppio del periodo (figure 15a,b,c,d,e).

Continuando a diminuire la frequenza della forzante a $\nu = 0.76 \text{ Hz}$, e sempre con ampiezza $= 0.57 \text{ radianti}$, si trova una oscillazione di periodo quadruplo (figura 16).

L'analisi di Fourier conferma la presenza delle frequenze $1/2$ ed $1/4$ della frequenza forzante, e la simulazione con Stella riproduce bene i dati sperimentali.

Infine a $\nu = 0.70 \text{ Hz}$ si osserva un moto caotico nel quale il pendolo oscilla a tratti attorno ad una delle due posizioni d'equilibrio passando però talvolta, in maniera irregolare, attorno alla seconda posizione d'equilibrio (figura 17).

La figura 18 mostra la mappa di Poincaré determinata registrando θ e $\dot{\theta}$ in corrispondenza al massimo positivo della forzante per i dati sperimentali (a) e nella simulazione con Stella (b)

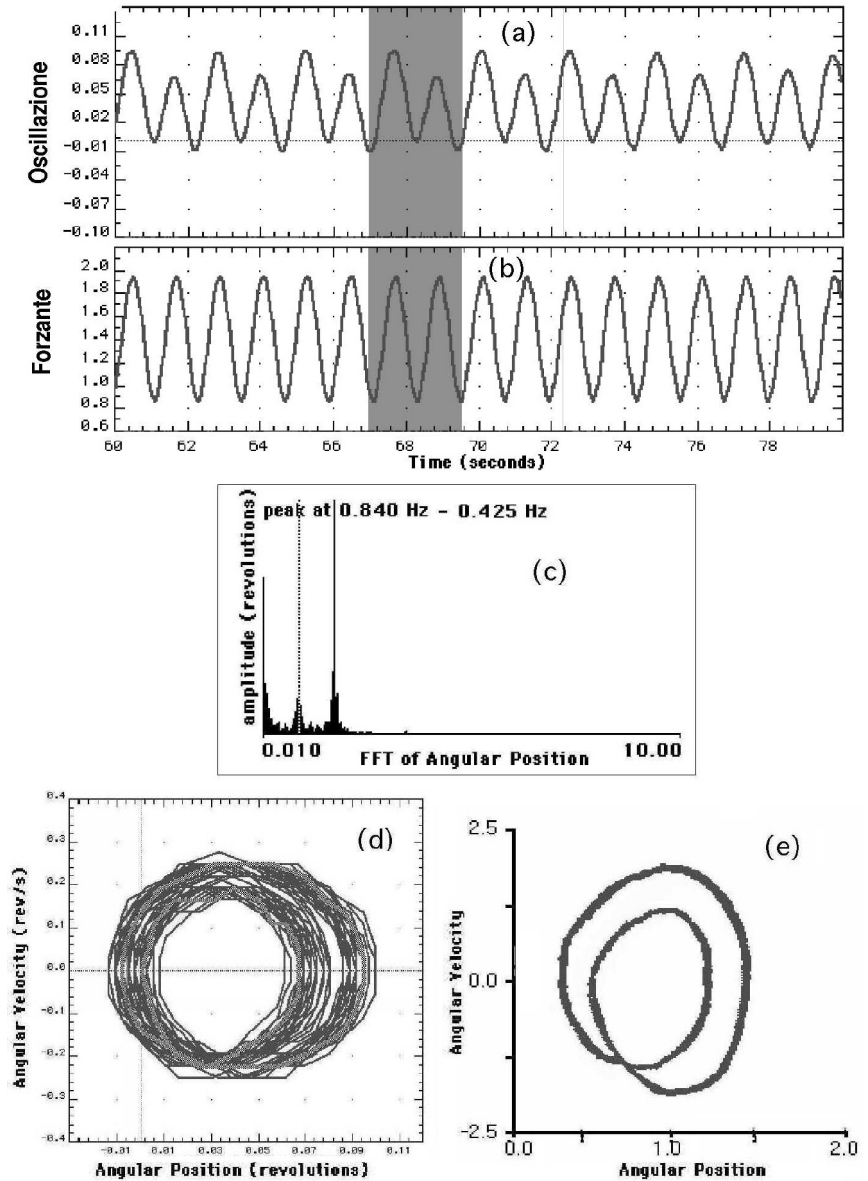


Figura 15. Duplicazione del periodo: si notino i due picchi nello spettro di Fourier (c), uno alla frequenza della forzante ed uno alla frequenza metà, e la figura a due anelli intersecantisi nel diagramma dello spazio delle fasi sperimentale (d) e simulato con Stella (e).

Abbiamo anche osservato un caso di triplicazione del periodo (figura 19). Questa situazione di solito si realizza in una delle finestre periodiche che si possono trovare nella zona dei moti caotici (vedi ad es. [3], pag. 82)

Il picco più alto della trasformata di Fourier (c) è alla frequenza 1/3 della forzante. Spazio delle fasi in (d)

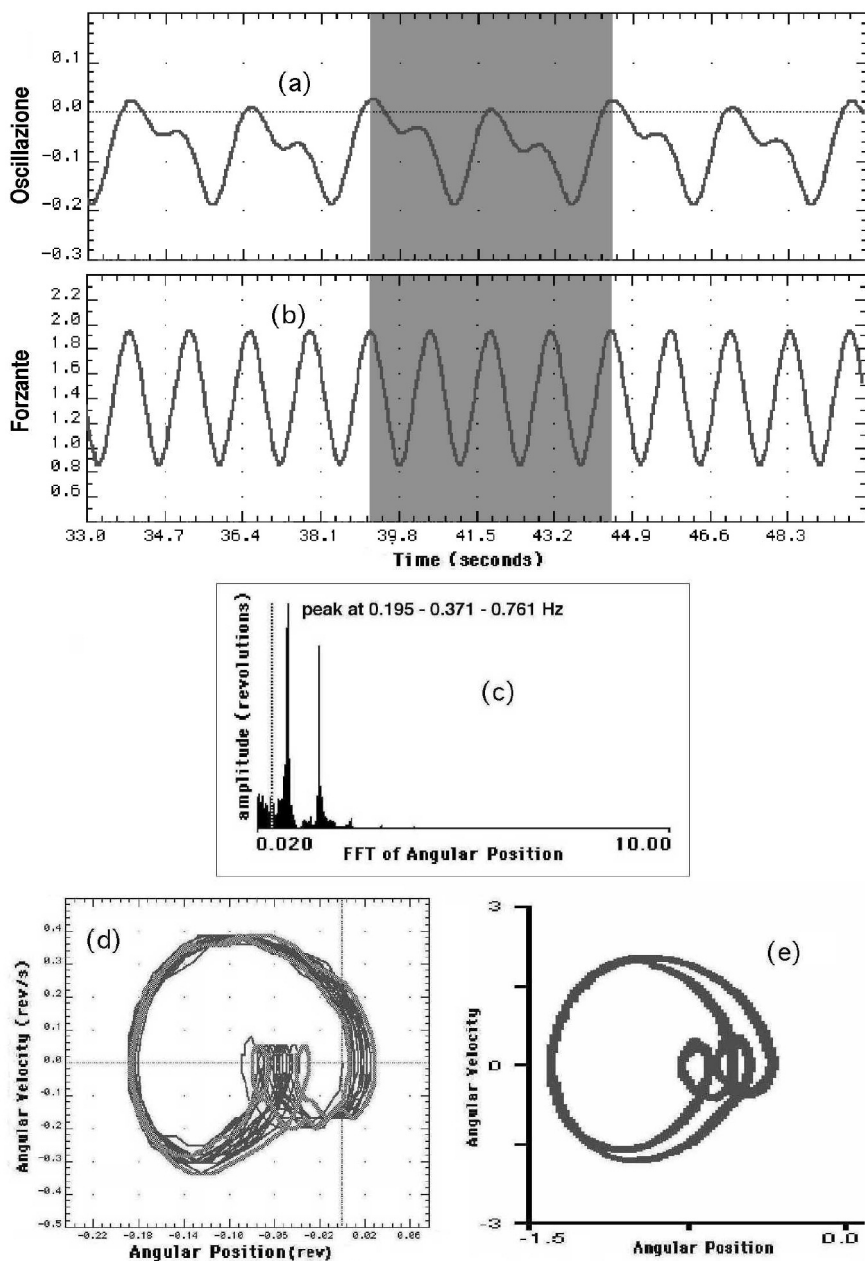


Figura 16 :Quadruplicazione del periodo: lo spettro di Fourier (c) mostra tre picchi e il diagramma nello spazio delle fasi ha 4 anelli , più evidenti nella simulazione (e) che nel diagramma sperimentale (d)

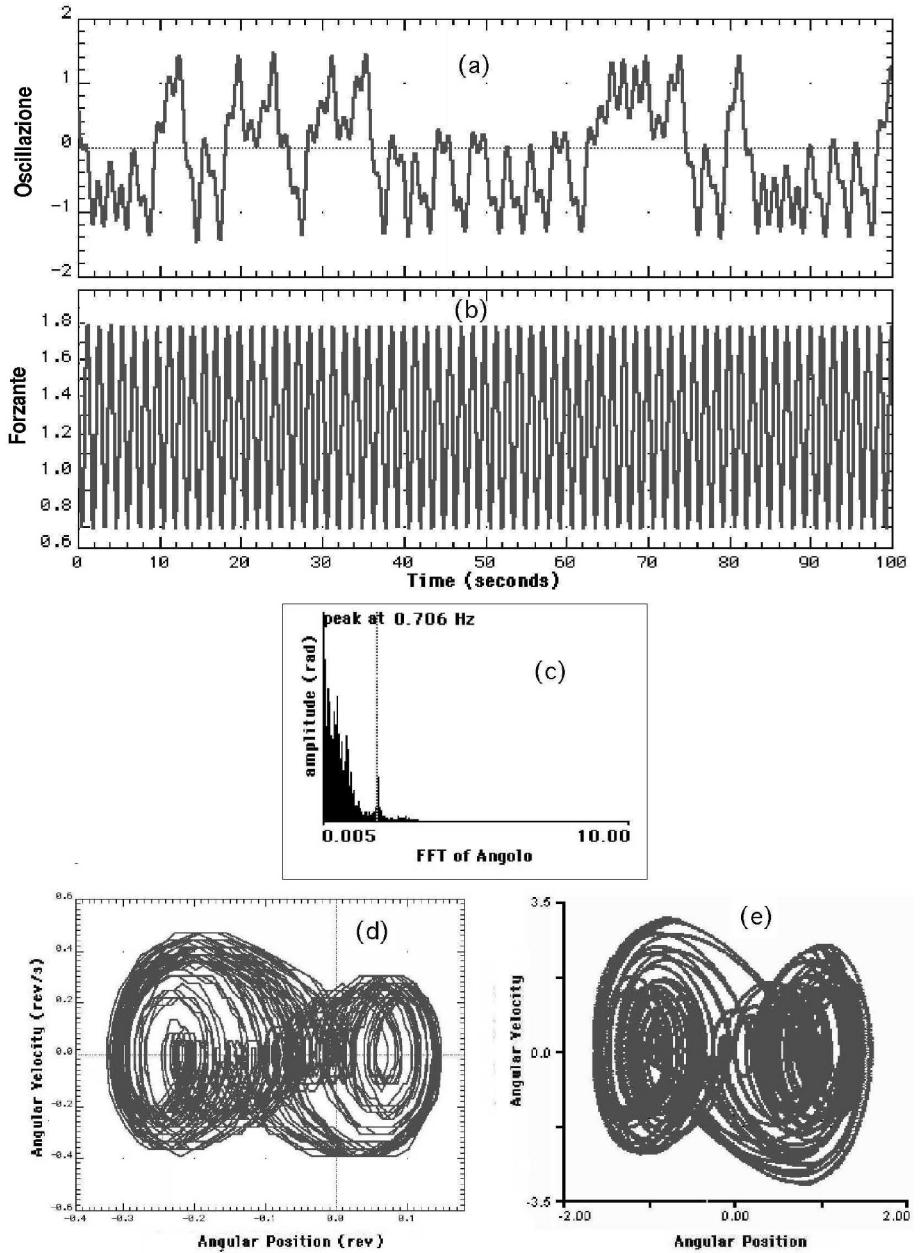


Figura 17: Moto caotico, andamento temporale della posizione angolare del pendolo (a) e dell'estremo della molla forzante (b). Lo spettro di Fourier (c) presenta uno spettro continuo e un picco alla frequenza della forzante. Lo spazio delle fasi sperimentale (d) e simulato (e) sono molto simili.

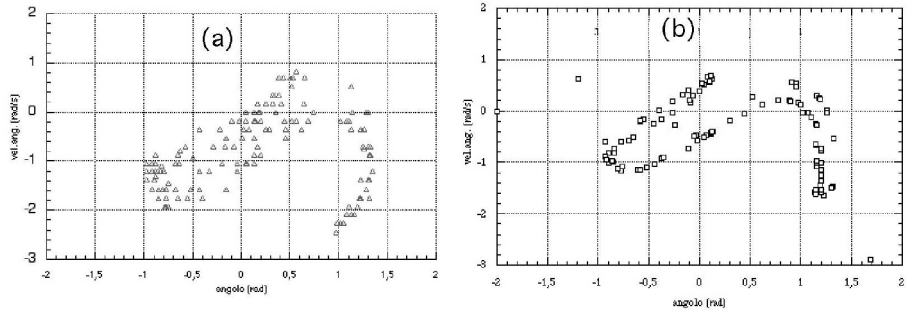


Figura 18. Mappa di Poincaré sperimentale (a) e simulata con Stella (b).

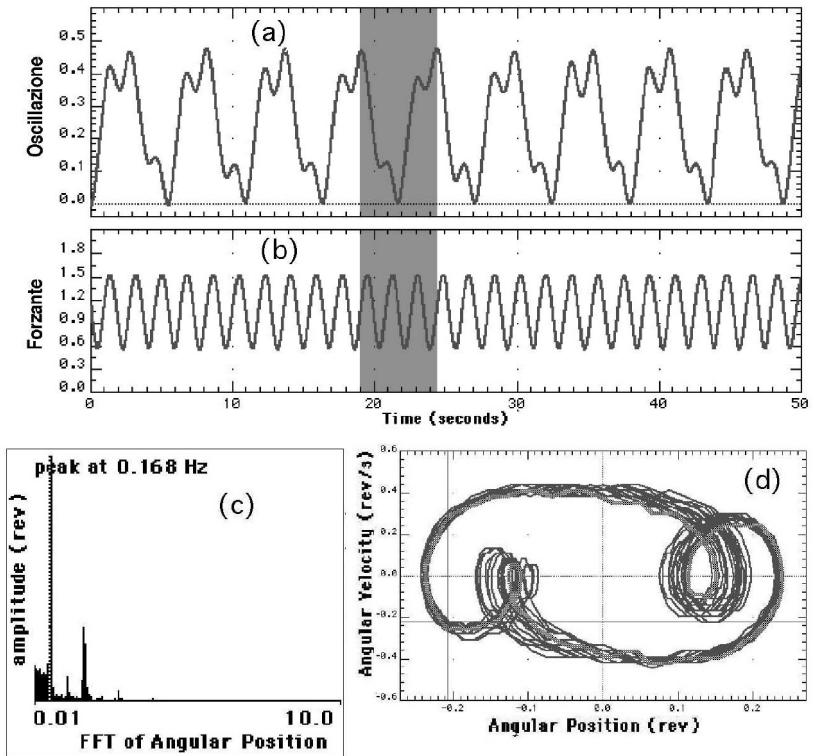


Figura 19. Triplicazione del periodo (a) registrazione delle oscillazioni (b) segnale della forzante a 0.51 Hz.

§6 Un circuito elettrico che obbedisce all'equazione di Duffing

Mediante alcuni comuni amplificatori operazionali ($\mu A741$) e due moltiplicatori (AD633) è facile montare, anche su una basetta di prova, il circuito di figura 20 il cui comportamento è retto dalla equazione di Duffing :

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \alpha V + \beta V^3 + \varepsilon \frac{dV}{dt} = f(t) = f \sin \omega t .$$

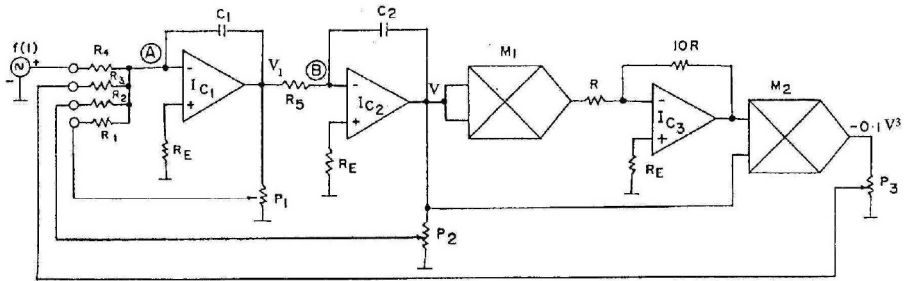


Figura 20. Schema dell'oscillatore che obbedisce all'equazione di Duffing.

Per capirne il funzionamento basta sapere che un amplificatore operazionale è un circuito integrato (IC) con un ingresso invertente (indicato con $-$) ed uno non invertente (indicato con $+$), ed una uscita, dotato di due proprietà basilari, cioè che entrambi gli ingressi hanno impedenza d'ingresso molto grande ("infinita") e fattori di amplificazione molto grandi ("infiniti"), da cui segue che la differenza di potenziale fra i due ingressi in zona lineare è sempre trascurabile.

I primi due operazionali (IC1 ed IC2) sono collegati ad anello (cioè l'uscita di ciascuno di essi è collegata all'ingresso invertente dell'altro) in modo da ottenere un circuito oscillante [8].

La tensione d'uscita di IC2 (indicata con V in figura 20) è la tensione oscillante che segue l'equazione di Duffing, che viene fornita ad entrambi gli ingressi del moltiplicatore $M1$ il quale dà in uscita il quadrato di V , diviso per 10. IC3 moltiplica per -10 il segnale $/10$ in modo che nel secondo moltiplicatore $M2$ entrano i segnali $-V$ e l'uscita fornisce $-10V$. Una parte di questa tensione, prelevata al cursore del potenziometro P_3 , viene riportata all'ingresso invertente di IC1 tramite la resistenza R_3 .

All'ingresso invertente del primo operazionale (IC1) vengono sommati quattro segnali: il segnale sinusoidale esterno $f(t)$, cioè il segnale che forza le oscillazioni del circuito, una frazione di $-10V$, una frazione (prelevata dal partitore P_2) di V , e una frazione del segnale V_1 in uscita da IC1 (prelevata dal partitore P_1).

Veniamo ora a scrivere l'equazione del circuito.

Nel punto B della figura (ingresso invertente di IC2) il potenziale è zero (massa virtuale) come quello dell'ingresso non invertente, che è collegato a massa tramite la resistenza R_E . La corrente che percorre la resistenza R_5 è quindi $i = V_1/R_5$; questa corrente, per effetto dell'impedenza d'ingresso infinita di IC2, fluisce interamente attraverso il condensatore C_2 . La corrente attraverso C_2 è $i = dq/dt = -C_2 dV/dt$ e quindi:

$$-C_2 dV/dt = V_1 / R_5 . \tag{11}$$

Analogamente al nodo A (ingresso invertente di IC1), anch'esso a massa virtuale, la corrente attraverso il condensatore C_1 , cioè $-C_1 dV_1/dt$, è uguale alla som-

ma delle quattro correnti che vi confluiscono tramite le resistenze R_1, R_2, R_3 ed R_4 . Abbiamo quindi:

$$-C_1 dV_1/dt = p_1 V_1/R_1 + p_2 V/R_2 - 0.1 p_3 V^3/R_3 + f(t)/R_4, \quad (12)$$

dove abbiamo indicato con p_i la frazione ($0 \leq p_i \leq 1$) del segnale che si preleva al potenziometro P_i .

Ricavando V_1 dalla (11), sostituendolo nella (12) e moltiplicando tutto per R_1 si ottiene:

$$R_1 R_5 C_1 C_2 d^2 V/dt^2 = -p_1 R_5 C_2 dV/dt + p_2 R_1/R_2 V - 0.1 p_3 R_1/R_3 V^3 + f(t) R_1/R_4.$$

Se scegliamo per R_1, R_2, R_4, R_5 lo stesso valore R_0 (p.es. 100 Ω), ed invece per R_3 il valore $R_0/10$ ed uguali capacità $C_1 = C_2 = C$ (p.es. 0.01 μF), l'equazione diventa:

$$(R_0 C)^2 d^2 V/dt^2 - p_2 V + p_3 V^3 + p_1 R_0 C dV/dt = f(t) = f \sin \omega' t.$$

Se infine usiamo le variabili ridotte $\tau = R_0 C t$ e $\omega' = \omega/(R_0 C)$ l'equazione assume la forma:

$$d^2 V/d\tau^2 - p_2 V + p_3 V^3 + p_1 dV/d\tau = f \sin \omega' \tau.$$

che è esattamente quella della equazione di Duffing con $\alpha = -p_2$, $\beta = p_3$, $\varepsilon = p_1$.

Cosa significa in pratica riscaldare il tempo di un fattore $R_0 C = 10^{-3}$ come indicato? Vuol dire che se regoliamo il generatore che fornisce il segnale sinusoidale esterno alla frequenza $(R_0 C)^{-1}/(2\pi) \approx 160 \text{ Hz}$, il circuito simula analogicamente il modello matematico $d^2 V/dt^2 + \alpha V + \beta V^3 + \varepsilon dV/dt = f \sin t$, nel quale cioè, per semplicità di calcolo, si è fissata la pulsazione ω ad 1 (vedi [6]).

Detto ancora in altri termini: alle piccole oscillazioni di "frequenza scalata" $1/(2\pi) \approx 0.16$, cioè con pulsazione $\omega = 1$ del modello matematico corrispondono nel circuito reale piccole oscillazioni di frequenza $(R_0 C)^{-1}/(2\pi) \approx 160 \text{ Hz}$.

Dato che α è negativo e β è positivo questo circuito è l'analogo elettronico del pendolo invertito con due posizioni di equilibrio. In questo caso i potenziali di equilibrio (attorno ai quali hanno luogo le piccole oscillazioni) sono dati da

$$V_{1,2} = \pm \sqrt{-p_2 / p_3}.$$

La relazione (11) mostra inoltre che V_1 cioè il segnale d'uscita di IC1 è l'opposto della derivata del segnale V che segue l'equazione di Duffing.

§7 La realizzazione del simulatore dell'equazione di Duffing e le sue prestazioni

Il circuito, montato e provato con successo su basetta di prova, è stato poi montato in una scatola con i tre potenziometri, che permettono di scegliere i valori di α , β ed ε , su pannello frontale. I potenziometri sono helipot dotati di graduazione fra 0 ed 1 leggibile direttamente.

Si sono aggiunti (figura 21) due inverters (IC4 ed IC5 selezionabili mediante interruttori) in modo da poter studiare anche gli altri casi di equazione di Duffing con $\alpha > 0$ e $\beta < 0$.

In questo articolo riferiremo tuttavia solo sul comportamento del circuito con α negativo e β positivo, ed in particolare con $\alpha = -1$, $\beta = +1$ ed $\varepsilon = 0.5$ (che è il caso studiato numericamente da Lakshmanan e Murali [6]) perchè è quello che si presta più agevolmente ad evidenziare la transizione al caos.

All'accensione della alimentazione (duale, a $\pm 10 \text{ V}$) il circuito si presenta a caso in uno dei due possibili stati di equilibrio con $V = +1$ e $V = -1 \text{ V}$ e accendendo il generatore esterno di sinusoidi con piccola ampiezza (che indicheremo, come nella formula (11), con $f \approx 0.1 \text{ V}$) e frequenza $\nu = 160 \text{ Hz}$ il circuito compie piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio in cui si è venuto a trovare.

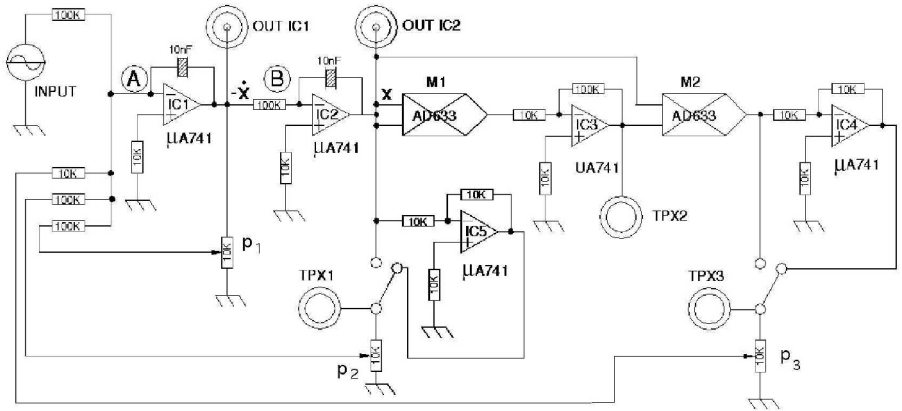


Figura 21. schema finale dell'oscillatore.

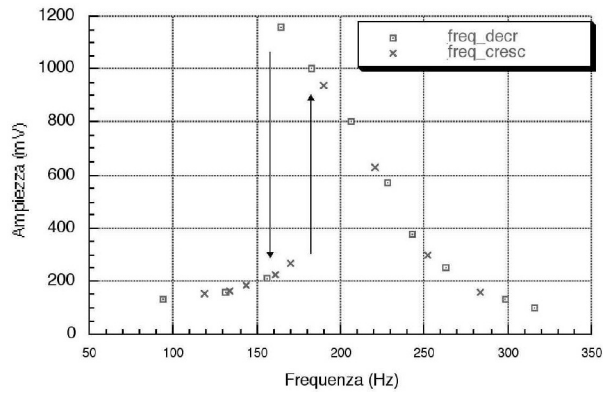


Figura 22. il fenomeno dei salti di ampiezza e l'isteresi. La curva di risonanza è inclinata a sinistra e non a destra perché α è negativo.

Abbiamo osservato i salti d'ampiezza e l'isteresi quando si varia la frequenza della forzante, sempre con ampiezza $f = 0.1$ V. Il fenomeno è più evidente se si riduce la costante dello smorzamento ad $\varepsilon \approx 0.1$ (figura 22).

Aumentando la tensione d'ingresso V_{in} (l'ampiezza della forzante f), con $V_{in} \leq 1$ V, si osserva duplicazione, quadruplicazione, ecc. del periodo e caos prima ad una banda cioè intorno ad una sola delle posizioni d'equilibrio e poi a due bande cioè intorno ad entrambe le posizioni d'equilibrio.

Nello stabilire il tipo di comportamento del circuito è di grande aiuto la mappa di Poincaré cioè i punti nello spazio delle fasi ($V, dV/dt$) registrati ad ogni periodo del segnale forzante. Quando il comportamento è periodico di periodo n -plo rispetto al periodo del segnale forzante la mappa di Poincaré si riduce ad n punti mentre nel caso di evoluzione caotica la mappa riproduce l'attrattore strano caratteristico dell'equazione di Duffing con $\alpha = -1$, $\beta = +1$ ed $\varepsilon = 0.5$. Quest'ultimo ha una forma simile ad un "ricciolo" più una cuspid (figura 23): la cuspid corrisponde ad oscillazioni caotiche intorno alla posizione di equilibrio a +1 V ed il ricciolo ad oscillazioni caotiche intorno alla posizione di equilibrio a -1 V.

Per poter osservare sperimentalmente la mappa di Poincaré abbiamo realizzato un circuito aggiuntivo, descritto nell'Appendice II.

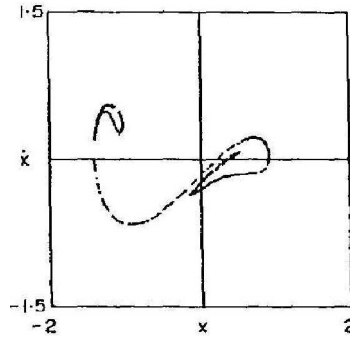


Figura 23. L'attrattore strano con $\alpha = -1$, $\beta = +1$, $\varepsilon = 0.5$, $V_{in} \leq 1$ V, figura presa da [5].

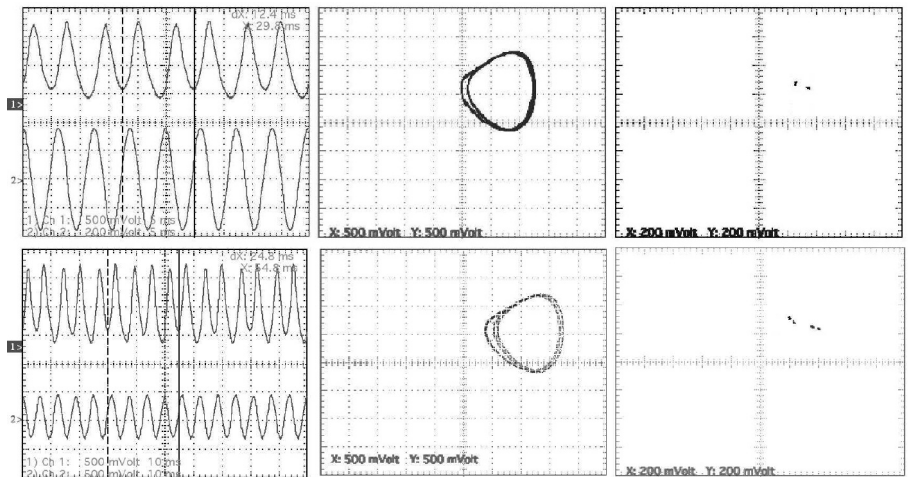


Figura 24. duplicazione (sopra) e quadruplicazione (sotto) del periodo. A sinistra la tensione $V(t)$ e la tensione forzante $V_{in}(t)$, al centro lo spazio delle fasi (V , dV/dt), a destra la mappa di Poincaré.

Per ampiezza f della forzante fino a circa 0.34 V si hanno solo piccole oscillazioni "armoniche" cioè con lo stesso periodo della forzante. Per ampiezza un po' maggiore si osserva la duplicazione del periodo e per $f = 0.364$ V, con qualche difficoltà, la quadruplicazione del periodo (figura 24).

Con un ulteriore piccolissimo incremento di f si passa direttamente al caos, cioè in pratica tutti i successivi raddoppi di periodo voluti dalla teoria (o meglio dalle simulazioni numeriche) non si vedono proprio.

Inizialmente cioè fino a circa 0.4 V si ha caos ad una banda, cioè le oscillazioni caotiche si svolgono solo intorno ad una delle due posizioni di equilibrio. Continuando ad aumentare f si passa poi al caos a due bande cioè ad oscillazioni caotiche che racchiudono entrambe le posizioni di equilibrio (figura 25).

Notiamo che l'attrattore strano è capovolto rispetto alla fig. 23 perchè noi mandiamo all'ingresso del circuito "mappatore" V e $-V$ invece che V e V .

Tutto questo corrisponde molto bene con i risultati delle simulazioni numeriche di Lakshmanan e Murali ([5] e [6]).

Nella zona del caos si incontrano però molte "finestre periodiche", cioè intervalli di f nei quali il moto ridiventa periodico con periodo multiplo secondo un numero intero apparentemente qualsiasi, del periodo della forzante.

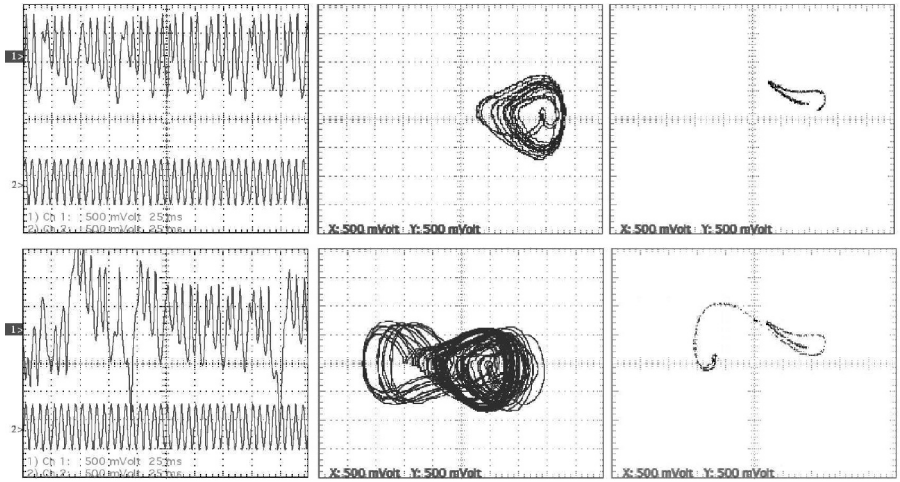


Figura 25. Caos ad una banda (sopra) e a due bande (sotto). A sinistra la tensione $V(t)$ e la tensione forzante $V_{in}(t)$, al centro lo spazio delle fasi $(V, dV/dt)$, a destra la mappa di Poincaré.

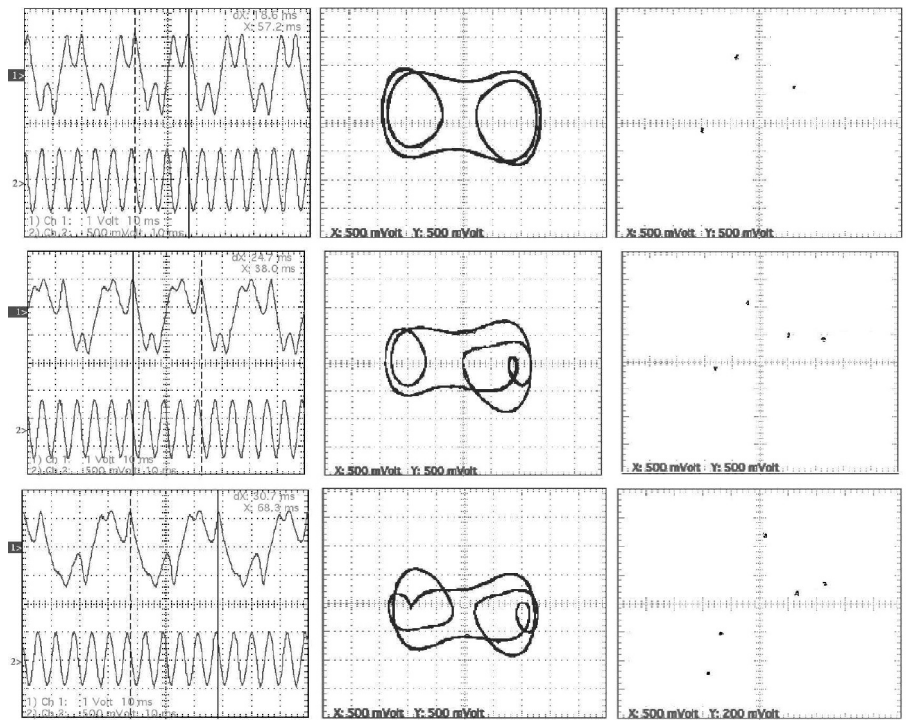


Figura 26. Ttriplicazione del periodo per $f=0.51$ (in alto), quadruplicazione del periodo per $f=0.52$ (in centro), quintuplicazione del periodo per $f=0.53$ (in basso).

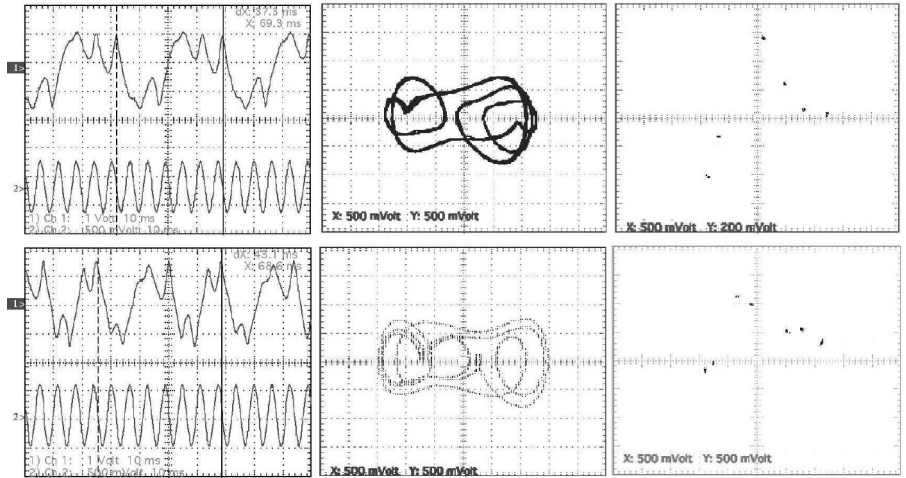


Figura 27. Sestuplicazione del periodo per $f = 0.45$ (in alto) e settuplicazione del periodo per $f = 0.55$ (in basso).

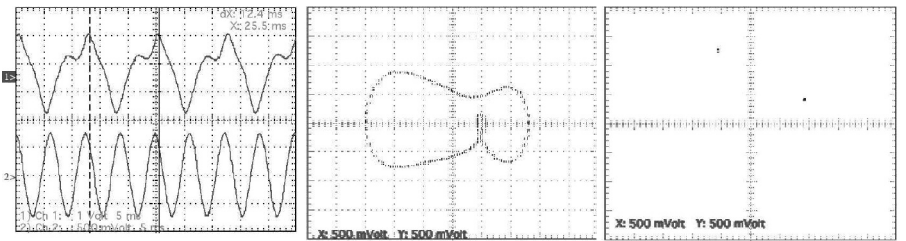


Figura 28. Duplicazione del periodo per grande ampiezza della forzante ($f = 0.74$).

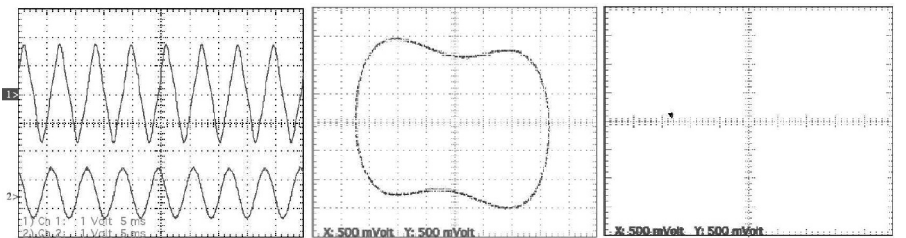


Figura 29. Oscillazioni stabili di grande ampiezza per f molto grande.

Ad esempio si osservano periodi multipli per valori crescenti di f (figura 26 e 27).

Si osservano anche ripetute finestre periodiche con duplicazione del periodo della forzante, per esempio per $f = 0.74$ V (fig. 28).

Per f ancora piu' grande si hanno invece oscillazioni periodiche di grande ampiezza che racchiudono entrambe le posizioni di equilibrio (fig. 29).

Conclusioni

L'esperimento con l'oscillatore elettrico non lineare permette nel tempo di un'ora di lezione o poco più di esplorare tutta la fenomenologia della transizione al caos, a differenza dell'esperimento meccanico che è intrinsecamente più lento, e la possibilità di osservare contemporaneamente (*in tempo reale*) sia il fenomeno caotico che la sua mappa di Poincaré ne aumenta la valenza didattica.

Tuttavia assistere alle evoluzioni imprevedibili del pendolo torsionale asimmetrico è sicuramente più sorprendente ed "emozionante" e quindi probabilmente più affascinante per un esperimento con gli studenti.

**Appendice I:
Forma
adimensionale
dell'equazione di
Duffing**

L'equazione di Duffing si può ridurre alla forma:

$$d^2x/d\tau^2 + \varepsilon dx/d\tau + x + x^3 = f \cos\omega\tau$$

nella quale tutte le grandezze sono adimensionali. Il procedimento è il seguente.

Partiamo dalla equazione delle oscillazioni forzate di una massa M mobile lungo l'asse y e richiamata, verso la posizione $y = 0$, da una forza con un termine lineare ed uno cubico:

$$d^2y/dt^2 + \varepsilon dy/dt + \omega_0^2 y + \beta y^3 = f \cos\omega t.$$

con $f = F/M$, dove F è l'ampiezza della forzante ed ω la sua frequenza angolare.

Le dimensioni delle varie grandezze sono:

$$[\varepsilon] = s^{-1} \quad [\beta] = s^{-2}m^{-2} \quad [\omega] = [\omega_0] = s^{-1} \quad [f=F/M] = N \text{ kg}^{-1} = m \text{ s}^{-2}.$$

Se poniamo $t = \tau/a$ e $y = b/x$, e moltiplichiamo tutto per b/a^2 l'equazione diventa

$$d^2x/d\tau^2 + \varepsilon/a dx/d\tau + (\omega_0^2/a^2) x + \beta/(a^2b^2) x^3 = f b/a^2 \cos(\omega/a \tau).$$

Se ora scegliamo $a = \omega_0$ e $b^2 = \beta/\omega_0^2$ l'equazione si trasforma in:

$$d^2x/d\tau^2 + \varepsilon' dx/d\tau + x + x^3 = f' \cos(\omega' \tau),$$

con le posizioni:

$$\varepsilon' = \varepsilon / \omega_0, \quad f' = f \beta^{1/2} / \omega_0^3 \\ \omega' = \omega / \omega_0, \quad \tau = \omega_0 t x = (\beta^{1/2} / \omega_0) y.$$

Ora τ è un numero puro, come pure ε' ed ω' , ed anche $[f'] = m \text{ s}^{-2} m^{-1} s^{-1}/s^{-3} = \theta$ e $[x] = s^{-1}m^{-1} m / s^{-1} = \theta$.

Eseguire questa trasformazione è un notevole vantaggio per i lavori di simulazione numerica perchè ora i parametri liberi nella equazione di Duffing sono ridotti solo a tre: il parametro di attrito ridotto ε' , l'ampiezza ridotta f' e la frequenza ridotta ω' della forzante.

**Appendice II: il
circuito
"mappatore" per
la mappa di
Poincaré**

Per ottenere sperimentalmente la mappa di Poincaré abbiamo costruito un circuito ausiliario, in sostanza un circuito di doppio "sample and hold", secondo lo schema di figura 30.

Il funzionamento non è difficile da capire: l'operazionale LM311 è uno squadratore che trasforma il segnale sinusoidale d'ingresso (la forzante) in una onda quadra fra 0 e +5 V, questo pilota col suo fronte di discesa (+5 → 0) il successivo "one-shot" 74HCT123 che dà in uscita un impulso che, nell'istante in cui il segnale forzante passa da valori positivi a valori negativi, comanda l'acquisizione ("sample") ed il mantenimento ("hold") fino all'arrivo del prossimo impulso di comando, del segnale che mandiamo ai due ingressi. Gli integrati LF398 sono appunto i due circuiti "sample and hold"; ad un ingresso viene inviato il segnale V del circuito caotico ed all'altro il segnale V .

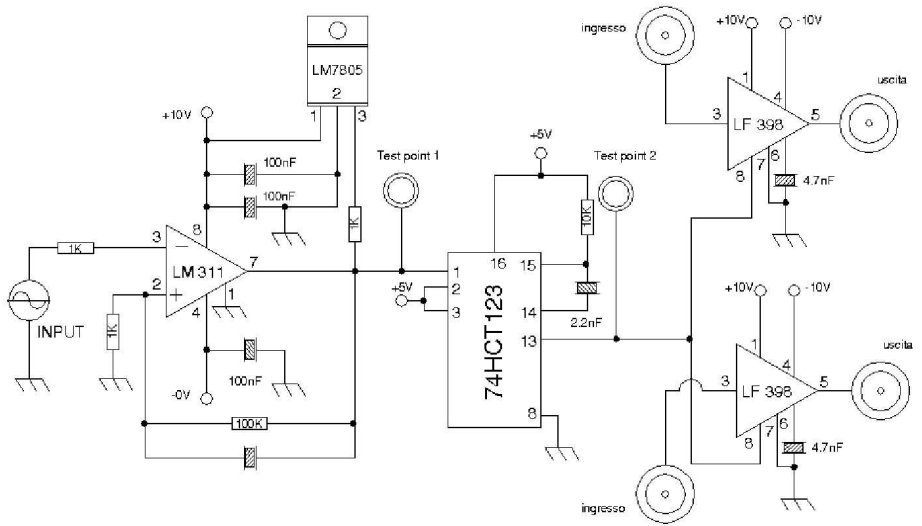


Figura 30. Schema elettrico del circuito di "sample and hold".

Per visualizzare sullo schermo di un oscilloscopio la mappa di Poincaré è sufficiente mandare i segnali d'uscita dei due LF398 ai due canali dell'oscilloscopio operante nella modalità x-y.

L'apparato sperimentale completo è mostrato in figura 31.

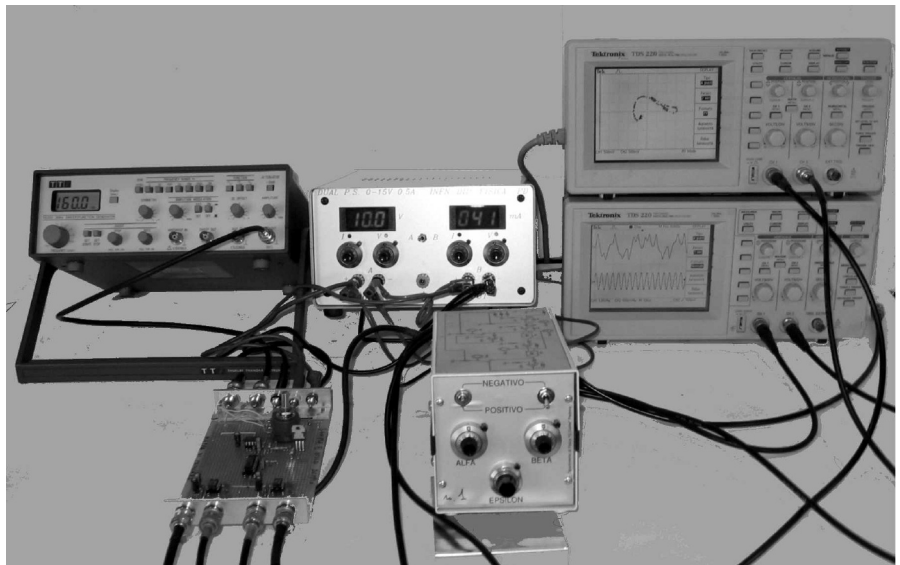


Figura 31. L'apparato sperimentale: in primo piano il circuito simulatore di Duffing (a destra) ed il circuito mappatore (a sinistra), in secondo piano il generatore di segnali, l'alimentatore duale e gli oscilloscopi che visualizzano la mappa di Poincaré (sopra) e l'oscillazione caotica e la forzante (sotto).

- Note**
- ¹ Sperimentalmente si ottiene la simmetria delle due posizioni di equilibrio con una regolazione fine della trazione di una delle due molle.
 - ² Con l'aggiunta di una vite di opportuna massa per compensare la mancanza di massa dovuta alla feritoia.
 - ³ Tenendo conto anche dell'effetto della massa mancante eccentrica dovuta alla fenditura.
 - ⁴ La maggior parte dei dati qui presentati sono stati raccolti da Paola Bedendo per il suo lavoro di tesi: "Oscillazioni lineari e non lineari e fenomeni caotici" Università di Padova, 2001.
 - ⁵ La simulazione numerica di figura 12 è stata eseguita scegliendo per i valori dei parametri ridotti: $\omega' = 1$, $\epsilon' = 0.5$, e variando solo l'ampiezza ridotta f' della forzante.
 - ⁶ Le posizioni di equilibrio sono date da $\pm\sqrt{\alpha/\beta}$ e quindi, usando le variabili ridotte, sono a ± 1 .

Bibliografia

- [1] A. SCONZA, "Le oscillazioni di un sistema massa-molla, seconda puntata", *La Fisica nella Scuola*, XL, n. 2, aprile-giugno, p. 76-87 (2007).
- [2] G. DUFFING, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz*, F. Wieweg u. Sohn, Braunschweig (1918).
- [3] J.J. STOKER, *Nonlinear vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, Intersc. Publ. (1950).
- [4] G.L. BAKER e J.P. GOLLUB, *Chaotic Dynamics, an introduction*, Cambridge University Press (1990).
- [5] M. LAKSHMANAN, K. MURALI, *Chaos in Nonlinear Oscillators*, World Scientific, (1996).
- [6] M. LAKSHMANAN, K. MURALI, *Physics News* **24**, 3 (1993).
- [7] C.L. OLSSON, M.G. OLSSON, *Am. J. Phys.* **59**, 907 (1991).
- [8] G. TORZO, *Capire e sperimentare gli amplificatori operazionali*, Decibel-Zanichelli (1991).