

Costanza Bottino⁽¹⁾, Maria Grazia Cerisola^(1,2), Antonella Cuppari^(1,3), Ilda Giraudo^(1,2), Paolo Pezzini^(1,2), Giuseppina Rinaudo⁽¹⁾, Ornella Robutti^(1,4), Andrea Sconza⁽⁵⁾, Giacomo Torzo⁽⁵⁾, Silvia Varano^(1,2), Paolo Violino⁽¹⁾

⁽¹⁾ Dipartimento di Fisica Sperimentale, Università di Torino

⁽²⁾ Liceo Scientifico "Niccolò Copernico", Torino

⁽³⁾ Liceo Scientifico "Giordano Bruno", Torino

⁽⁴⁾ Dipartimento di Matematica, Università di Padova

⁽⁵⁾ Dipartimento di Fisica, Università di Padova

La conduzione elettrica nei metalli e nei semiconduttori: aspetti microscopici, statistici e quantistici

1. Premessa

1.1 Obiettivi generali

L'obiettivo di questa proposta didattica è l'utilizzo di un fenomeno ben noto e già ampiamente studiato negli abituali curricula, cioè il trasporto dell'elettricità nei solidi, per scoprire alcune proprietà *microscopiche* del modo in cui avviene tale trasporto e introdurre alcuni concetti importanti di meccanica statistica e quantistica. Dal punto di vista didattico, i punti a favore sono molteplici:

- si parte dalla legge di Ohm, che è una legge importante dal punto di vista applicativo ed è già abitualmente studiata nei curricula tradizionali;
- è possibile realizzare tutta una serie di esperimenti, a diverso livello di sofisticazione e complessità, dalla semplice misura della resistenza elettrica di un pezzo di filo metallico (che richiede praticamente solo un tester, un alimentatore e un termometro), alla misura della conducibilità in un semiconduttore o una misura di effetto Hall;
- si possono introdurre modelli interpretativi a diverso livello di sofisticazione, da ampliare eventualmente via via che si aggiungono nuove informazioni fenomenologiche;
- ci sono vari calcoli ed esercizi numerici che sono utilissimi per fissare ordini di grandezza, valori e relazioni tra grandezze fisiche significative;
- è un esempio di come si possano ottenere informazioni su proprietà microscopiche dalla misura di grandezze macroscopiche attraverso l'uso di modelli statistici;
- offre spunti per una discussione sui limiti della meccanica classica applicata al comportamento di atomi ed elettroni e sulla differenza fra descrizione classica e quantistica e per introdurre alcuni concetti importanti di meccanica quantistica.

Stimolo allo sviluppo della proposta sono stati i lavori di Sconza e Torzo [1], in cui si mostra che dalla misura di alcune grandezze macroscopiche, quali la conducibilità elettrica e la sua dipendenza dalla temperatura, è possibile ottenere informazioni importanti sugli aspetti microscopici, statistici e quantistici che sono fondamentali nella descrizione della struttura della materia. Poiché le misure delle grandezze macroscopiche possono essere eseguite, come mostrato nel riferimento [1], con una strumentazione di laboratorio relativamente semplice e accessibile anche a una scuola secondaria, ci siamo posti il problema di sviluppare un percorso didattico che permettesse di affrontare gli aspetti microscopici, statistici e quantistici in modo sostanzialmente rigoroso ma accessibile, dal punto di vista formale e concettuale, a studenti di scuola secondaria. In particolare, per gli aspetti quantistici, abbiamo seguito l'approccio descritto nel riferimento [2] di questo stesso *Quaderno* introducendo altri concetti quantistici importanti quali il principio di esclusione di Pauli, e il concetto di "banda di energia proibita".

1.2 Contenuti e obiettivi specifici

Il materiale è organizzato come segue. Nel capitolo 2 presentiamo il modello microscopico classico della conducibilità elettrica nei metalli. Lo scopo del capitolo è quello di ogni modello microscopico, ossia ricondurre le proprietà macroscopiche al comportamento di un altissimo numero di particelle microscopiche che seguono le leggi della meccanica (in questo capitolo le leggi sono quelle della meccanica classica).

Ciò viene fatto in due passi. Nel primo passo si derivano le relazioni chiave tra grandezze macroscopiche e grandezze microscopiche: si introduce la semplice descrizione microscopica della corrente elettrica in termini di particelle microscopiche cariche (gli elettroni) che si muovono di moto viscoso sotto l'azione di un campo elettrico, seguendo una trattazione che si può provare su molti testi anche di scuola secondaria [3]. Nella seconda parte si amplia il modello microscopico per spiegare l'origine della viscosità del moto degli elettroni: ciò può essere fatto solo introducendo un'ipotesi statistica, perché, dovendo descrivere gli effetti del moto di un altissimo numero di particelle, non è pensabile di poter seguire nel suo moto ogni singola particella e quindi si ricorre al calcolo di valori medi, seguendo ragionamenti di tipo statistico.

Il ricorso ai ragionamenti statistici forma la base di una disciplina importante, la *meccanica statistica*, che è fondamentale per trattare problemi di struttura della materia. Noi assumiamo che gli studenti siano già familiari con questo tipo di ragionamento dalla teoria cinetica dei gas, della quale esistono ottime derivazioni anche a livello di scuola secondaria [4].

Il modello che discuteremo è un buon esempio di applicazione della teoria cinetica: si tratta sostanzialmente il modello di Drude [5], che fu storicamente il primo modello microscopico statistico per la descrizione della conduzione elettrica, sviluppato da Drude nel 1900, pochi anni dopo che era stata dimostrata l'esistenza dell'elettrone grazie agli esperimenti di Thomson ed erano state misurate la sua carica e la sua massa. Il modello ipotizza che gli elettroni di conduzione di un metallo si comportino come un gas di particelle libere che si muovono disordinatamente in tutte le direzioni con una energia cinetica media che dipende dalla temperatura secondo le leggi della teoria cinetica dei gas giungendo a spiegare la viscosità del moto degli elettroni in un metallo e a giustificare in particolare il fatto che la resistenza elettrica aumenti con la temperatura. L'obiettivo specifico dell'introduzione del modello di Drude è duplice: da un lato è un bell'esempio di applicazione di ragionamenti statistici e in particolare della teoria cinetica dei gas, dall'altro utilizza, per descrivere il moto dell'elettrone, un linguaggio e delle grandezze fisiche che facilitano il successivo passaggio alla descrizione quantistica.

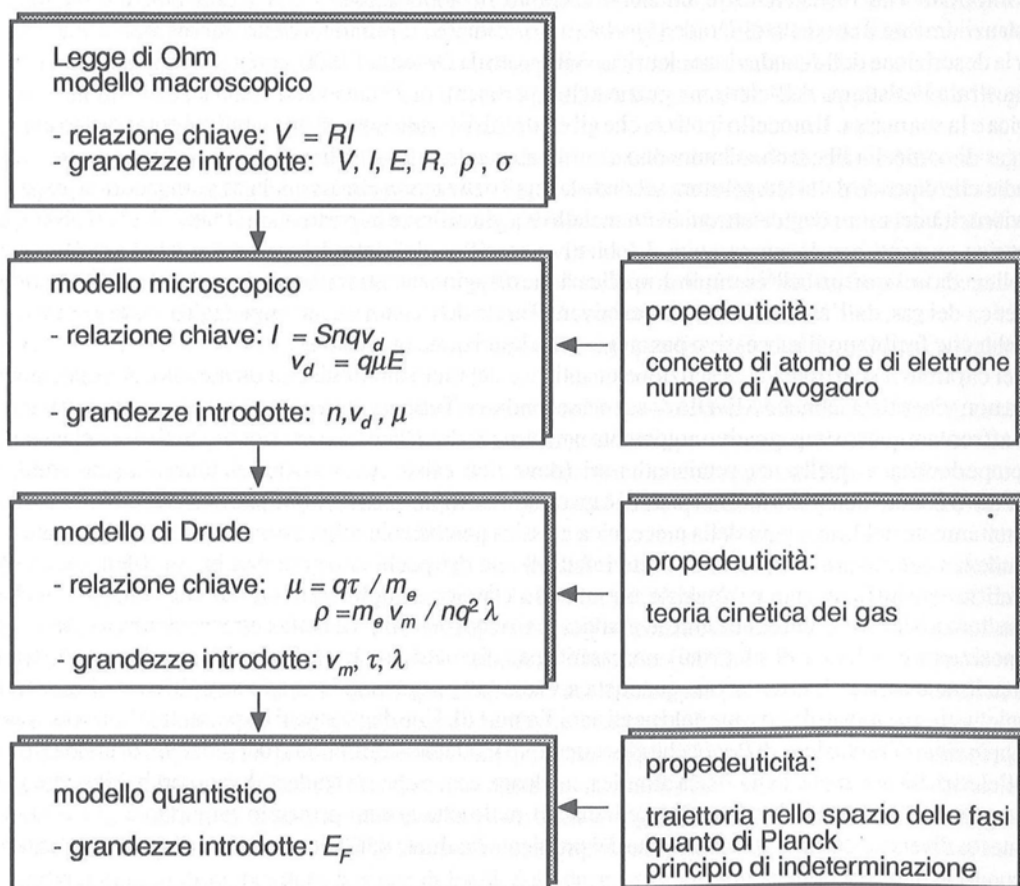
Nel capitolo 3 si affronta la descrizione quantistica del moto elettronico in un metallo. Abitualmente essa non viene data, almeno a livello di scuola secondaria. Tuttavia noi vediamo importanti motivazioni per affrontare questo impegnativo argomento nel fatto che da un lato la descrizione quantistica nei metalli è propedeutica a quella nei semiconduttori (dove non esiste nessuna descrizione classica valida) dall'altro il moto dell'elettrone nei metalli è un ottimo esempio di caso limite che non può essere trattato correttamente nel linguaggio della meccanica classica perché coinvolge azioni che sono dell'ordine di grandezza del quanto di Planck. Si tratta infatti di uno dei pochi casi fortunati in cui il fenomeno va descritto quantisticamente però esiste un modello classico semplice e intuitivo che funziona anche abbastanza bene e che introduce tutte le grandezze fisiche (descrizione della corrente elettrica in termini di posizioni e velocità di elettroni) necessarie per discutere e capire il significato dei limiti della trattazione classica. La trattazione quantistica viene fatta seguendo in modo semplificato il modello semiclassico proposto da Sommerfeld negli anni Trenta [6]. Uno degli aspetti importanti è l'introduzione del *principio di esclusione di Pauli*, che gioca un ruolo fondamentale non solo nei problemi di conduzione dell'elettricità ma anche nella fisica atomica, nucleare, ecc. e che gli studenti hanno probabilmente già incontrato nel corso di chimica. Qui vedranno il ruolo che questo principio importante gioca in un contesto diverso e con una comprensione del problema facilitata dall'aver introdotto il quanto di Planck secondo le linee descritte sopra.

Il capitolo 4 infine è dedicato ai semiconduttori. A questo livello il passo importante è l'introduzione del concetto di *banda di energia proibita*. La nostra proposta è di partire dai fatti sperimentali e precisamente, come suggerito in [1], dalla dipendenza dalla temperatura della conducibilità elettrica, che nei semiconduttori ha un andamento opposto rispetto ai metalli e risalire di lì, in modo qualitativo, all'idea di banda energetica.

1.4 Scelte curriculari

Una possibile sequenza nella presentazione dei vari argomenti riguardanti la conduzione elettrica, con le relative propedeuticità e relazioni, è illustrata nel diagramma di flusso. Lo scopo del diagramma non è tanto di imporre la scelta degli argomenti quanto piuttosto di dare un quadro di insieme. Il primo gruppo di propedeuticità riguarda nozioni che gli studenti hanno dal corso di chimica: in particolare è importante richiamare il significato del numero di Avogadro perché in questo contesto esso ha un ruolo abbastanza diverso dal contesto chimico in cui lo studente lo ha visto in precedenza. Il secondo gruppo di propedeuticità riguarda i concetti statistici, che come già ricordato prima, rappresentano un passo obbligato se si vogliono discutere a livello microscopico le proprietà della materia. Il terzo gruppo di propedeuticità riguarda i concetti quantistici, per l'introduzione dei quali facciamo riferimento all'articolo [2] di questo stesso *Quaderno*.

LA CONDUZIONE ELETTRICA



1.3 Sperimentazione

Il materiale qui presentato è stato discusso con degli insegnanti, alcuni dei quali erano laureati in fisica mentre altri non avevano una laurea in fisica o non avevano una preparazione specifica in fisica della materia e in meccanica quantistica. Solo una parte del materiale è stato effettivamente provato in classe con gli studenti. La parte descritta nel capitolo 2 è stata sperimentata in alcune classi di IV e V liceo scientifico, collegata allo studio della legge di Ohm; sono state eseguite anche le misure di laboratorio riguardanti la dipendenza dalla temperatura della resistenza elettrica di fili metallici, descritte in dettaglio nell'articolo [7] di questo stesso *Quaderno* e valutato l'apprendimento con un test finale a risposte aperte o semiaperte (quesiti a risposta multipla, con richiesta di motivare la risposta). Gli studenti conoscevano già la teoria cinetica dei gas, la struttura atomica della materia e le caratteristiche dell'elettrone. Il tempo necessario è stato fra le tre e le cinque ore (incluso il laboratorio). Il capitolo 3 è stato sperimentato in una V liceo scientifico che aveva già sperimentato in IV il modello classico di Drude ed eseguito le misure di laboratorio, con una valutazione basata su un test a risposte aperte o semiaperte. Il tempo necessario è stato di circa 6 ore. Sul capitolo 4 non disponiamo invece, per ora, di una vera e propria sperimentazione: è stato utilizzato finora solo da singoli studenti molto motivati come argomento per l'esame di maturità.

2. Il significato della legge di Ohm

Conviene iniziare facendo fare agli studenti alcune riflessioni sulla legge di Ohm, che è, come ben noto, la legge principale che governa il trasporto dell'elettricità nei conduttori:

$$V = RI \quad (1)$$

La legge definisce sostanzialmente la grandezza *resistenza elettrica* R , il cui interesse consiste nel fatto che essa, per molti solidi e in particolare per i buoni conduttori, è costante al variare della tensione V e della corrente I (anche se ci sono variazioni dovute al cambiamento di temperatura causato dalla variazione di V o di I , come vedremo). Ciò rende la relazione fra tensione e corrente un buon esempio di relazione lineare. In materiali come i metalli la linearità della relazione è ben rispettata su molti ordini di grandezza di variazione di V o di I , se si ha cura di mantenere costante la temperatura (vedi ad esempio la seconda scheda di riferimento [7]): conviene sottolineare questo fatto con gli studenti, perché esso indica che non ci troviamo di fronte a una legge puramente empirica (come è ad esempio la legge di Hooke, in cui la linearità tra forza e allungamento è semplicemente una approssimazione lineare di una legge ben più complicata) e quindi può essere interessante indagare il fenomeno per capirne il significato.

Discuteremo il significato della legge di Ohm, prima a livello *macroscopico*, cioè trattando la corrente elettrica come un *fluido* che trasporta la carica elettrica attraverso il conduttore, e poi a livello *microscopico*, cioè facendo delle ipotesi sulla natura microscopica del fluido elettrico. Il modello microscopico trattato in questo capitolo è completamente basato sulle leggi della meccanica classica.

2.1 Il livello macroscopico

Può essere utile, se il tempo a disposizione lo permette, iniziare con un breve richiamo storico che aiuti a inquadrare il significato che ebbe la legge di Ohm nel contesto storico. Infatti l'enunciazione stessa della legge da parte di G.S. Ohm nel 1826 rappresentò al tempo una vera e propria rivoluzione nel modo di descrivere i fenomeni elettrici nei conduttori, come è ricordato molto bene da Leschiutta nel suo bell'articolo sui primi strumenti di misura elettrici [8], e proprio per questo motivo stentò ad essere accettata dalla comunità scientifica dell'epoca: essa segnò sostanzialmente il passaggio dal modo di pensare *elettrostatico* al modo di pensare *elettrodinamico*.

In elettrostatica si ragiona principalmente in termini di *quantità di carica* che si può isolare o depositare su un corpo o spostare da un corpo all'altro, di *campo di forze* che le cariche creano nello spazio che le

circonda e della relazione che tale campo ha con la quantità di carica. È importante anche la disposizione delle cariche nei corpi: in un corpo carico, le cariche tendono a disporsi sulla *superficie*, indipendentemente dal loro segno, in un modo inoltre che dipende dalla forma del corpo.

Nel caso dinamico i corpi che si studiano sono complessivamente neutri, cioè le cariche positive equilibrano le cariche negative, mentre diventa importante il moto delle cariche all'interno del solido, che è un fenomeno che interessa tutto il *volume*: infatti il flusso di carica, cioè la *corrente elettrica*, è distribuito nell'intero volume e avviene in modo da non creare accumuli in nessun punto e in nessun momento.

Questa semplice ipotesi è alla base del modello *macroscopico* del trasporto dell'elettricità, nel quale la corrente elettrica viene descritta come un fluido in moto che si conserva attraverso il circuito. Le principali verifiche sperimentali del modello sono che la stessa quantità di corrente passa in qualsiasi sezione perpendicolare alla direzione della corrente e che ciò avviene in maniera indipendente dalla forma e dal tipo di conduttore. Ponendosi su diverse sezioni trasverse del circuito (S_1, S_2, S_3 , ecc.) le quantità di carica (Q_1, Q_2, Q_3 , ecc.) che attraversano nell'intervallo di tempo Δt le rispettive sezioni sono uguali (fig. 1) e quindi anche le correnti, $I_1 = Q_1 / \Delta t$, $I_2 = Q_2 / \Delta t$, ecc., debbono essere uguali: in ogni tratto il solido deve restare mediamente neutro, le cariche non possono accumularsi né disperdersi. E tutto ciò vale anche se si cambia il tipo di conduttore da un tratto all'altro.

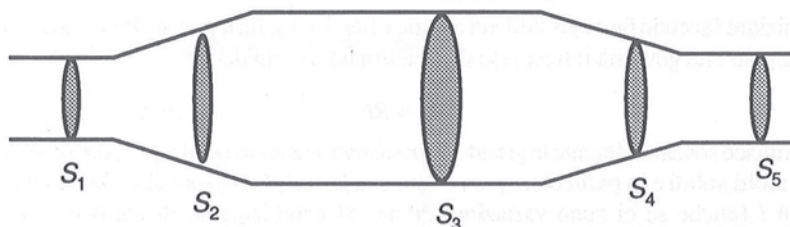


Figura 1. In un certo intervallo di tempo, la quantità di carica che attraversa una qualunque sezione S del circuito è la stessa.

Conviene a questo punto definire la *resistività elettrica*, perché, come già Ohm aveva trovato, esiste una semplice relazione fra la resistenza e le caratteristiche geometriche del conduttore, e cioè la sezione trasversa S e la lunghezza l nella direzione in cui fluisce la corrente:

$$R = \frac{\rho l}{S} \quad (2)$$

La grandezza ρ è caratteristica del materiale che costituisce il conduttore e contiene appunto l'informazione che a noi interessa sulla struttura microscopica della materia. Ricordando la relazione tra la differenza di potenziale V e il campo elettrico E :

$$V = l E \quad (3)$$

e tenendo conto della (1) e della (2) si ha:

$$E = \frac{\rho I}{S} \quad (4)$$

Per discutere il modello microscopico, conviene definire anche la *conducibilità elettrica* σ come l'inverso della resistività e quindi scrivere la (4) come:

$$I = \sigma E S \quad (5)$$

Vedremo che in alcuni casi è meglio ragionare in termini di ρ , e quindi usare l'equazione (4) mentre in altri è meglio ragionare in termini di σ , e quindi usare l'equazione (5). Questo è il motivo per cui

abbiamo derivato le relazioni per entrambe le grandezze, tuttavia non è detto che, nella discussione con gli studenti, debbano essere presentate entrambe. Abbiamo invece evitato di introdurre il concetto di densità di corrente j ($j = I/S$), che pure permetterebbe una semplificazione delle formule, perché abbiamo notato, in alcune classi, una certa difficoltà a manipolare una molteplicità di nuove grandezze.

In vista della discussione che faremo successivamente della dipendenza dalla temperatura della resistività, conviene anche collegare alla legge di Ohm la *legge di Joule*, che qui richiamiamo per comodità. La legge esprime la potenza W immessa nel circuito dal generatore che mantiene la differenza di potenziale V ai capi del conduttore in cui passa la corrente I :

$$W = VI \quad (6)$$

Infatti nell'intervallo di tempo Δt la carica Q che transita nel circuito vale:

$$Q = I \Delta t \quad (7)$$

Tale carica attraversa la differenza di potenziale V e quindi ha a disposizione una quantità di energia pari al lavoro $L = QV = VI \Delta t$ fatto dal campo elettrico. Tale energia viene ceduta al conduttore, causando un aumento della sua temperatura: proprio l'interpretazione di tale aumento di temperatura sarà una delle motivazioni per introdurre il modello microscopico.

Misure in laboratorio

Esiste tutta una serie di misure sulla conduzione dell'elettricità, alcune delle quali già si fanno abitualmente, che si possono utilizzare per consolidare questo primo semplice modello. Ad esempio:

- si può misurare la corrente in diversi punti di un circuito eterogeneo, fatto di pezzi di conduttori diversi, e verificare che è la stessa nei vari tratti;
- dopo aver fatto questa verifica, si cambia uno qualunque dei pezzi di conduttore e si verifica che la corrente cambia dappertutto nel circuito;
- si misura la conservazione della corrente a una biforcazione;
- si eseguono le classiche misure di dipendenza della resistenza elettrica dalla sezione e dalla lunghezza del conduttore;
- si verifica la validità della legge di Ohm facendo variare I e V sull'intervallo più largo possibile (occorre badare che la temperatura non cambi molto a causa dell'effetto Joule, quindi conviene partire dai valori più bassi possibili di V o di I , ai limiti della sensibilità degli strumenti a disposizione: come descritto nella scheda n. 2 dell'articolo di riferimento [7] di questo stesso *Quaderno*, con un po' di attenzione si riesce a coprire anche 5 ordini di grandezza di variazioni di V);
- se si possiede la relativa apparecchiatura, è estremamente utile eseguire la misura diretta della potenza dissipata per effetto Joule (vedi scheda n. 4 dell'articolo [7]).

In tutte le misure conviene misurare separatamente il valore della corrente e della differenza di potenziale ai capi del conduttore, badando a definire in modo preciso qual è l'estensione del conduttore in esame e l'importanza relativa della resistenza interna dello strumento.

Calcoli ed esercizi

Partendo dai valori di V e I misurati negli esperimenti, conviene, per ogni misura:

- calcolare la resistenza R , verificando che è indipendente dal valore di V e di I (se si trova una dipendenza, cercare di individuare i possibili motivi o almeno le correlazioni, ad esempio con la temperatura o con il tempo trascorso dalla prima chiusura del circuito);
- calcolare il campo elettrico E (occorre aver misurato prima la lunghezza del conduttore);
- calcolare la resistività ρ e la conducibilità σ ;
- se sono state fatte misure su conduttori dello stesso materiale ma di diversa lunghezza o sezione, verificare che ρ e σ sono costanti;

- se sono state fatte con materiali diversi, confrontare i valori e, se possibile confrontare i valori con quelli standard;
- calcolare la potenza dissipata per effetto Joule e, se si è misurato il tempo, l'energia dissipata;
- dall'energia dissipata calcolare l'aumento di temperatura aspettato nell'ipotesi che tutta l'energia dissipata vada effettivamente a riscaldare il conduttore e confrontarlo con l'aumento di temperatura misurato.

2.2 Il livello microscopico

Dopo aver fissato questo primo modello a livello macroscopico, si può scendere a livello *microscopico*. Come detto nell'introduzione, il primo passo del modello microscopico ha lo scopo di introdurre le grandezze che descrivono il moto delle particelle microscopiche che formano la corrente elettrica e di derivare le relazioni fra grandezze macroscopiche (I , V , R , E , ρ , σ) e grandezze microscopiche. Supponiamo che a questo punto gli studenti abbiano già alcune nozioni sulla struttura microscopica della materia, in particolare conoscano la struttura dell'atomo in termini di cariche elettriche: sappiano cioè che gli atomi sono neutri, che hanno un nucleo massivo di carica positiva e un ugual numero di cariche negative portate da elettroni. Inoltre debbono aver fatto – o almeno visto descritto – un qualche esperimento sulla natura granulare della carica elettrica (tipo Millikan) per cui sanno già che il fluido elettrico è composto da portatori discreti che trasportano tutti la stessa carica elementare q , e che inoltre abbiano visto qualche misura o svolto esercizi sul moto di elettroni liberi in un campo elettrico uniforme (ad esempio un esperimento con un tubo a raggi catodici).

La prima cosa da capire, utilizzando la legge di Ohm, è che nei solidi esistono dei portatori di carica *mobili*, ma che essi non sono completamente liberi come invece sono ad esempio gli elettroni che si muovono in un tubo catodico sotto l'azione di un campo elettrico. L'argomento è ben noto e si trova in molti testi [3], tuttavia lo riportiamo per aver sotto mano tutte le relazioni che ci serviranno nel seguito.

Esaminiamo dapprima come dovrebbe essere la relazione fra differenza di potenziale e corrente per un gas di elettroni che viaggia indisturbato in una zona in cui è presente un campo elettrico: è importante per capire poi l'effetto del "disturbo" creato dagli ioni del reticolo. Supponiamo che gli elettroni si muovano in un tubo cilindrico di sezione S sotto l'azione di un campo elettrico E dovuto alla differenza di potenziale V applicata ai capi del cilindro (vedi fig. 2).

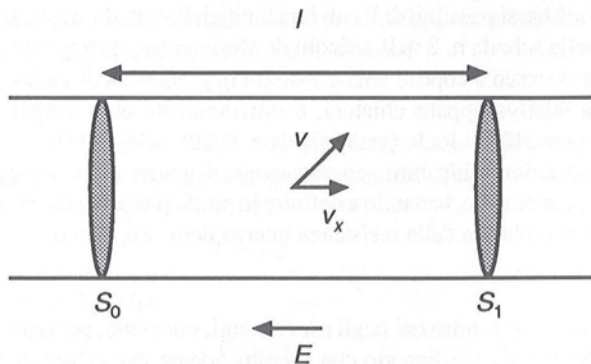


Figura 2. Gli elettroni viaggiano indisturbati in un cilindro di sezione S ai cui capi è applicata una differenza di potenziale: la direzione del campo elettrico E è parallela all'asse del cilindro. Nella figura è indicata la velocità v e la sua componente v_x lungo l'asse x preso nella direzione di E .

Se ci mettiamo in una sezione S_1 del tubo e vogliamo misurare la corrente I dobbiamo misurare la carica totale Q che attraversa la sezione in un intervallo di tempo Δt . Scriviamo la carica Q come prodotto del numero totale N di elettroni che attraversano la sezione nel tempo Δt per la carica q dell'elettrone:

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{Nq}{\Delta t} \quad (8)$$

Il numero N e l'intervallo di tempo Δt sono legati fra di loro. Per trovare la relazione, introduciamo una grandezza che ha un ruolo importante nella conduzione dell'elettricità nei solidi, cioè la velocità di deriva v_d , che è il *valor medio* della componente v_x della velocità presa lungo la direzione del campo elettrico. Il passaggio al calcolo del valor medio è un tipico modo di procedere della *meccanica statistica* a cui si ricorre necessariamente per trattare sistemi di molte particelle come sono appunto gli elettroni di conduzione in un metallo: è quindi propedeutica una certa conoscenza dei metodi di meccanica statistica (in particolare il ricorso all'uso di valori medi), di cui esistono buone presentazioni anche a livello di scuola secondaria superiore.

I singoli elettroni possono avere valori di v_x anche molto diversi fra di loro, sia positivi che negativi, perché il loro moto è dovuto all'agitazione termica e quindi è del tutto casuale: poiché tuttavia non ha senso né interesse calcolare ciò che succede al singolo elettrone con il suo particolare valore di v_x , si fa il calcolo per un valore pari alla media statistica v_d dei valori di v_x .

Con questa ipotesi, è facile convincersi guardando la figura 2 che nel tempo Δt riescono ad attraversare la sezione S_1 tutti quegli elettroni che all'istante $t = 0$ si trovavano a una distanza l minore di $v_d \cdot \Delta t$ da S_1 cioè avevano già attraversato la sezione S_0 , posta a monte di S_1 a una distanza l , quindi:

$$\Delta t = \frac{l}{v_d} \quad (9)$$

sostituendo nell'equazione (8) si ottiene:

$$I = \frac{Nqv_d}{l} \quad (10)$$

A questo punto conviene definire una grandezza importante che è la *densità numerica*, n , degli elettroni mobili, data dal rapporto tra il numero N e il volume $V_{\text{cond}} = S \cdot l$ contenuto tra le due sezioni S_0 ed S_1 :

$$n = \frac{N}{V_{\text{cond}}} = \frac{N}{S \cdot l} \quad (11)$$

Sostituendo, si ottiene l'espressione:

$$I = n S q v_d \quad (12)$$

Questa è la relazione fondamentale che lega la grandezza macroscopica I alle grandezze microscopiche n , q e v_d : q è una costante, mentre n e v_d possono variare, quindi le analizzeremo per capirne l'entità e il legame con la struttura microscopica del solido. Per semplicità supporremo che il conduttore sia omogeneo e che abbia sempre la stessa sezione.

2.2.1 Il calcolo di n

Il calcolo esplicito di n è necessario solo se si vuole sviluppare quantitativamente il modello, quindi può essere omesso se ci si vuole limitare agli aspetti qualitativi. Tuttavia, se il tempo a disposizione lo permette, è un calcolo utilissimo, anche se fatto in modo approssimato, perché rende più concreto il passaggio al livello microscopico ed è un utile esercizio sugli ordini di grandezza che esso implica. Meglio ancora è misurare in laboratorio il valore di n ricorrendo all'effetto Hall: la misura è fattibile anche in una scuola secondaria, come mostrato nel riferimento [9] e nella scheda 7 dell'articolo [7] di questo *Quaderno*.

Per valutare n faremo un semplice ragionamento basato sulle leggi della meccanica classica: discuteremo poi i limiti di questo ragionamento quando tratteremo i semiconduttori. Un solido, anche se è un buon conduttore, è complessivamente neutro, perché è formato da atomi che sono neutri, cioè hanno un numero di elettroni pari al numero di cariche positive del nucleo. Nella formazione del solido, alcune cariche, che nell'atomo neutro isolato sono costrette a muoversi in uno spazio ristretto intorno al nucleo, possono diventare in parte mobili, cioè si staccano dal legame con il singolo atomo e si muovono in uno

spazio esteso che interessa più atomi. Questi, a loro volta, avendo perso uno o più elettroni, rimangono "ionizzati", cioè con un eccesso di carica positiva. Come ciò succeda effettivamente e come vada inteso lo spazio più esteso in cui si possono muovere gli elettroni può essere discusso in modo rigoroso solo con una trattazione quantistica, tuttavia, almeno per i buoni conduttori come il rame, non è troppo sbagliato trattare, come abbiamo fatto noi, i portatori di carica mobili nei solidi come elettroni liberi, i quali rispondono all'azione di un campo elettrico come se fossero nel vuoto, cioè con la stessa massa inerziale dell'elettrone libero.

Per la maggioranza dei metalli e in particolare per gli ottimi conduttori quali il rame il numero di elettroni mobili per atomo è circa pari al numero degli elettroni di valenza. Tale fatto si può giustificare qualitativamente con un semplice modello basato su considerazioni di dinamica classica, che sono ancora sostanzialmente valide anche in una trattazione quantistica del problema. Negli atomi di tipo metallico gli elettroni di valenza hanno una distanza media dal nucleo abbastanza elevata e quindi sono debolmente legati. Quando il solido si forma a partire da atomi isolati, l'orbita di questi elettroni esterni tende ad estendersi anche nelle regioni degli atomi vicini, per cui in senso stretto non si può più pensare che essi "appartengano" a un ben determinato atomo. Essi appartengono piuttosto a molti atomi contemporaneamente, cioè sentono l'attrazione elettrostatica da parte delle cariche positive di molti atomi, anzi è proprio il fatto che gli elettroni mobili siano attirati da più atomi che tiene insieme il solido, dando origine a quello che viene chiamato il *legame metallico*.

Basandoci su questo semplice modello possiamo calcolare il valore di n semplicemente moltiplicando la densità numerica di atomi nel solido, n_{at} , per il numero di elettroni di valenza dell'atomo (almeno se il solido è fatto di una sola specie di atomi). La densità numerica di atomi nel solido, n_{at} , è il numero di atomi diviso il volume del solido e possiamo valutarla in un modo approssimato pensando che il suo inverso, $V_{\text{at}} = 1 / n_{\text{at}}$, è pari al volume del solido diviso per il numero di atomi e quindi ha il significato di "volume medio" occupato da un singolo atomo. Se gli studenti hanno in mente dalla chimica che le dimensioni atomiche sono dell'ordine di qualche unità in 10^{-10} m, calcoleranno facilmente che $V_{\text{at}} \approx 10^{-29} \text{ m}^3$ e quindi $n_{\text{at}} \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$.

Un calcolo più rigoroso, ma più complicato, si può fare ricorrendo al numero di Avogadro N_{Av} , note la densità d e la massa atomica A della sostanza. Infatti N_{Av} è il numero di atomi contenuto in una mole di sostanza ed è pari a $6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, quindi n_{at} è pari a N_{Av} diviso per il volume occupato da una mole, V_{mole} . Poiché la massa atomica è la massa corrispondente a una mole di sostanza, dividendo A per la densità si ottiene V_{mole} , da cui:

$$n_{\text{at}} = \frac{N_{\text{Av}}}{V_{\text{mole}}} = N_{\text{Av}} \frac{d}{A} \quad (13)$$

Esempio

Facciamo il calcolo di n per un conduttore come il rame che ha valenza pari a uno: c'è quindi un elettrone mobile per atomo e di conseguenza n coincide con n_{at} . Essendo:

$$A_{\text{Cu}} = 0,0635 \text{ kg/mol}$$

$$d_{\text{Cu}} = 9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Sostituendo nella (13) si ottiene:

$$n_{\text{at}} \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

2.2.2 La velocità di deriva

Se l'elettrone fosse indisturbato nel suo moto, in presenza di un campo elettrico e per effetto dell'accelerazione dovuta al campo elettrico, la componente v_x della sua velocità crescerebbe man mano

che procede nella zona in cui è presente il campo. Infatti sull'elettrone agisce una forza $F_E = qE$ e l'accelerazione vale:

$$a = \frac{F_E}{m_e} = \frac{qE}{m_e} \quad (14)$$

quindi v_x aumenta secondo la legge:

$$v_x = at + v_{x0} = \frac{qEt}{m_e} + v_{x0} \quad (15)$$

dove v_{x0} è il valore di v_x all'ingresso della zona dove c'è il campo.

Poiché v_x cresce al crescere di t , ne segue che anche il suo valor medio v_d dovrebbe crescere, il che non è conciliabile con il fatto che la velocità di deriva v_d è costante, come si vede ricavando v_d dall'equazione (12).

Dobbiamo quindi abbandonare l'ipotesi che il moto dell'elettrone sia completamente libero e ipotizzare invece che esso sia ostacolato da una forza, tipo attrito viscoso, uguale e contraria alla forza F_E esercitata dal campo elettrico, in modo tale che complessivamente la risultante delle forze applicate sia nulla e la velocità si mantenga costante, una volta raggiunto il valore di regime.

Nel prossimo paragrafo discuteremo un modello che introduce delle ipotesi sull'origine della viscosità, qui ci limitiamo a ricavare alcune relazioni che facilitano tale discussione. Nel moto viscoso, il valore di regime della velocità è proporzionale alla forza applicata: in questi moti infatti è la velocità e non l'accelerazione a essere proporzionale alla forza applicata e il coefficiente di proporzionalità è l'inverso del coefficiente di attrito viscoso. Conviene quindi anche nel nostro caso rendere esplicita questa relazione: dato che la forza applicata è proporzionale al campo elettrico, si definisce una grandezza μ , detta *mobilità*, che rappresenta la costante di proporzionalità fra v_d ed E :

$$v_d = \mu E \quad (16)$$

Conviene ora ricavare la relazione tra la conducibilità σ e la mobilità μ : la otteniamo sostituendo l'espressione di v_d nella (12):

$$I = n q \mu E S \quad (17)$$

Confrontando questa equazione con la (5), otteniamo che:

$$\sigma = n q \mu \quad (18)$$

Questa equazione ci permette perciò, noti n e σ , di calcolare μ , da cui si possono poi ricavare le altre grandezze che compaiono nelle equazioni precedenti. Ad esempio, noti μ e il campo E , dalla (16) ricava la velocità di deriva v_d , che è per così dire la "velocità di crociera" a cui viaggiano gli elettroni nel solido. Se un conduttore ha un'alta mobilità significa che, a parità di campo elettrico applicato, la velocità di deriva che gli elettroni possono raggiungere è più elevata. Per valutare la mobilità occorre sviluppare ulteriormente il modello: vedremo come viene fatto il calcolo prima nel modello classico di Drude e poi nel modello quantistico di Sommerfeld.

Raccogliamo per comodità le equazioni più interessanti qui di seguito:

conducibilità	$\sigma = I / (E S)$
resistività	$\rho = E S / I$
velocità di deriva	$v_d = \mu E$
mobilità	$\mu = \sigma / (n q)$

Esempio

La conducibilità del rame è circa $\sigma = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$. Utilizzando il valore di n che abbiamo calcolato nell'esempio precedente, calcoliamo la mobilità dall'equazione (18), ricordando la relazione dimensionale $\Omega = V / A = V \text{ s} / C$ e sapendo che la carica q vale $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$:

$$\mu = \frac{\sigma}{nq} \approx \frac{6 \cdot 10^7 \text{ CV}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}}{10^{29} \text{ m}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \approx 3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

Da questo valore calcoliamo la velocità di deriva raggiunta applicando una differenza di potenziale di 4 V ai capi di un filo conduttore lungo 2 m:

$$v_d = \frac{10^{-3} \cdot 4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}{2 \text{ m}} = 0,006 \text{ ms}^{-1}$$

Misure di laboratorio

Tutte le misure suggerite per verificare il modello macroscopico sono utilizzabili anche per calcolare i parametri del modello microscopico. Se si dispone della strumentazione necessaria, conviene fare misure di effetto Hall, descritte in dettaglio nella scheda 7 dell'articolo di riferimento [7] di questo *Quaderno*.

Calcoli ed esercizi

- Noti i materiali di cui sono fatti i conduttori utilizzati nelle misure sperimentali, calcolare n , utilizzando l'equazione (13) e confrontarlo, se sono state fatte misure di effetto Hall, con il valore misurato.
- Dal valore di n , note le dimensioni l ed S del conduttore, calcolare il numero N di elettroni presenti nel pezzo di conduttore in esame.
- Utilizzando i valori di n e di σ , calcolare, per ogni misura fatta, il valore di μ .
- Dal valore di μ , utilizzando l'equazione (16), calcolare la velocità di deriva v_d per le varie misure eseguite.

2.3 Il modello di Drude

2.3.1 Ipotesi e quantità rilevanti

Come visto nel paragrafo precedente, il modello microscopico ci porta a concludere che il moto dell'elettrone nel metallo è di tipo viscoso. Per spiegare l'origine della viscosità Drude [5] sviluppò nel 1900, cioè quando le evidenze sperimentali sulla natura microscopica dell'elettricità avevano appena cominciato a prendere consistenza, un modello statistico che si ispirava alla teoria cinetica dei gas, che tanto successo aveva avuto per spiegare le leggi dei gas. Per introdurre il modello di Drude occorre quindi che gli studenti siano già familiari con i ragionamenti statistici che stanno alla base della teoria cinetica dei gas e che qui non richiamiamo perché ne esistono ottime derivazioni anche a livello di scuola secondaria superiore [4]. Nel modello vengono introdotte quattro ipotesi:

1. gli elettroni mobili si muovono liberamente all'interno del metallo di un moto disordinato dovuto all'agitazione termica: la velocità è diretta lungo direzioni casuali e il suo modulo ha un valore medio che dipende dalla temperatura secondo le leggi della meccanica statistica (ovviamente classica), come nella teoria cinetica dei gas;
2. in presenza di un campo elettrico E , al moto disordinato si sovrappone un moto di deriva ordinato nella direzione di E (in senso opposto, data la carica elettrica negativa dell'elettrone);
3. nel suo moto l'elettrone urta continuamente contro gli ioni che formano il solido (fig. 3), cedendo in media energia in modo da mantenere sempre costante il valore medio della sua energia cinetica e quindi della sua velocità;

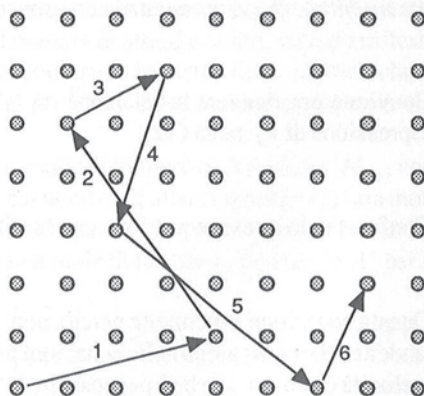


Figura 3. Il moto dell'elettrone procede per urti successivi contro gli ioni del solido (rappresentati nella figura dai pallini).

4. dopo l'urto, l'elettrone riparte con velocità diretta casualmente in tutte le direzioni e quindi la componente della sua velocità lungo qualunque direzione rimane in media nulla.

Le ipotesi del modello possono apparire contraddittorie fra di loro, perché da un lato si suppone che l'elettrone mobile sia libero di muoversi come la molecola di un gas (ipotesi 1), il che implica che non senta molto l'attrazione elettrostatica da parte degli ioni del solido, dall'altro si suppone invece che l'elettrone interagisca molto con gli ioni stessi (ipotesi 3), come è necessario se si vuole spiegare la viscosità del moto. Questa è effettivamente una delle difficoltà del modello, su cui ritorneremo più avanti quando ne discuteremo i limiti di validità.

Vediamo come si calcola la mobilità μ in base a queste ipotesi: l'equazione chiave è la (16), che definisce μ come costante di proporzionalità fra velocità e campo elettrico. Poiché ad ogni urto l'elettrone riparte con velocità diretta casualmente in tutte le direzioni (ipotesi 4), la componente della sua velocità lungo la direzione del campo elettrico dopo l'urto è diretta con eguale probabilità lungo la direzione della corrente o in direzione opposta e quindi non dà nessun contributo netto alla corrente. Ciò che importa è invece il contributo addizionale di velocità che l'elettrone acquista lungo la direzione del campo elettrico e in verso opposto a causa della forza dovuta al campo elettrico: il valor medio di tale contributo è appunto la velocità di deriva v_d .

Il contributo addizionale di velocità va valutato solo sul breve intervallo di tempo che intercorre prima dell'urto successivo, il quale può essere molto diverso da un urto all'altro, perché l'elettrone può trovarsi a percorrere un cammino più o meno lungo prima di urtare nuovamente oppure avere diversa velocità. Tuttavia a noi interessa solo il valor medio di tali intervalli (viene chiamato il *tempo di rilassamento* anche se sarebbe più opportuno chiamarlo in questo caso il "tempo medio di volo libero") perché è legato alla velocità di deriva v_d dalla semplice relazione:

$$v_d = \tau a \quad (19)$$

dove a è l'accelerazione dovuta al campo elettrico. Sostituendo il valore di a dato in (14) si ottiene:

$$v_d = \frac{q\tau}{m_e} E \quad (20)$$

da cui, confrontando con l'equazione (16), si trova:

$$\mu = \frac{q}{m_e} \tau \quad (21)$$

e quindi, per la (18):

$$\sigma = n q^2 \frac{\tau}{m_e} \quad (22)$$

Queste due ultime relazioni importanti perché mostrano che la mobilità μ e la conducibilità σ sono direttamente proporzionali a τ . Un grande tempo di rilassamento τ significa anche una grande mobilità e quindi un alto valore della conducibilità e ciò è molto ragionevole nel modello di Drude, perché significa che l'elettrone ha molto tempo per essere accelerato prima dell'urto successivo.

Nell'esempio che svilupperemo a fine paragrafo calcoleremo il valore di τ dal valore della mobilità di un buon conduttore come il rame e vedremo che è brevissimo, dell'ordine del femtosecondo (10^{-15} s).

Il calcolo della mobilità è quindi ricondotto a quello del tempo di rilassamento. Nel suo modello Drude lo calcola supponendo che l'elettrone abbia una velocità media v_m che dipende dalla temperatura (ipotesi 1) e che percorra in media fra due urti un tratto λ dell'ordine della distanza fra due atomi del solido (ipotesi 3): il tempo di rilassamento è quindi dato dalla semplice relazione:

$$\tau = \frac{\lambda}{v_m} \quad (23)$$

Il calcolo di τ è quindi a sua volta ricondotto al calcolo di λ (che viene chiamato il *cammino libero medio*) e di v_m : lo faremo in modo dettagliato, anche se è abbastanza complesso, perché è molto istruttivo.

Per il valore di λ , Drude usò semplicemente la distanza media fra gli ioni, di cui abbiamo già discusso in precedenza quando abbiamo stimato la densità numerica n .

Per stimare v_m Drude fece ricorso alla teoria cinetica dei gas. In tale teoria l'energia cinetica è proporzionale alla temperatura assoluta T , secondo la relazione:

$$\frac{1}{2} m_e v_m^2 = \frac{3}{2} k_B T \quad (24)$$

dove k_B è la costante di Boltzmann, che è pari a $1,4 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ (oppure $8,6 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$ usando unità più adatte alle grandezze microscopiche [10]). Ricavando v_m da questa relazione si ottiene:

$$v_m = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} \quad (25)$$

Sostituendo la (25) nella (23) si ottiene:

$$\tau = \lambda \sqrt{\frac{m_e}{3k_B T}} \quad (26)$$

L'equazione è molto istruttiva perché mostra che, al crescere della temperatura T , il tempo diminuisce e diminuiscono di conseguenza la mobilità e la conducibilità mentre, viceversa, aumenta la resistività: in questo modo Drude riesce a giustificare perché la resistenza elettrica aumenta nei metalli al crescere della temperatura. Sviluppando i calcoli per intero, cioè calcolando v_m e λ , si trova a temperatura ambiente un valore della resistività in buon accordo con il valore sperimentale, come faremo vedere nell'esempio di fine paragrafo.

Volendo restare su un livello di discussione qualitativo, si può comunque giungere a giustificare la dipendenza della resistenza dalla temperatura già sulla base della (23), sapendo che al crescere della temperatura cresce in media l'energia: ci si aspetta infatti che se gli elettroni vanno più veloci, τ diminuisca e si traggono quindi le stesse deduzioni di poco sopra circa il comportamento della mobilità e della resistività.

Qui di seguito raccogliamo per comodità tutte le equazioni che servono per fare il calcolo delle diverse variabili:

velocità media	$v_m = \sqrt{(3k_B T)/m_e}$
cammino libero medio	$\lambda \approx n_{\text{at}}^{-1/3}$
intervallo di tempo fra urti successivi	$\tau = \lambda/v_m$
mobilità	$\mu = q\tau/m_e$
conducibilità	$\sigma = nq^2 \tau/m_e = nq^2 \lambda / \sqrt{3k_B T m_e}$
resistività	$\rho = m_e v_m / (nq^2 \lambda) = \sqrt{3k_B T m_e} / (nq^2 \lambda)$

2.3.2 Luci ed ombre del modello di Drude

Il modello di Drude ha il grosso merito, come si è visto, di rendere conto degli aspetti principali della resistività elettrica a partire da ipotesi relativamente semplici. Ciò spiega il grande successo che il modello ebbe quando fu formulato e anche oggi, nonostante si sappia che il modello non è sostanzialmente corretto, si utilizzano nella descrizione della conduzione elettrica nei solidi molti concetti ed espressioni che derivano dal modello di Drude. Dal punto di vista didattico è un modello istruttivo perché mostra come una legge macroscopica e apparentemente fenomenologica come quella di Ohm trovi la sua giustificazione in ipotesi basate sulla struttura microscopica della materia. È inoltre un buon esempio di uso di ragionamenti statistici, anche se ci si ferma al livello semiquantitativo.

Tuttavia vi sono dei forti limiti alla validità del modello. Esistono infatti numerosi dati sperimentali che non sono in accordo con il modello e il fatto che esso dia un valore della conducibilità ragionevole a temperatura ambiente è una fortunata coincidenza. Il calcolo infatti va completamente in crisi alle temperature più basse o più alte. Infatti, se si esamina l'andamento della resistenza elettrica di buoni conduttori come il rame su un grosso intervallo di temperature, come fatto ad esempio nella scheda 4 del riferimento [7], si vede chiaramente che la dipendenza è lineare e non funzione della radice quadrata della temperatura, come ci si aspetterebbe in base alle equazioni derivate sopra (vedi ad es. la fig. 4 dell'articolo [7] già citato).

Altre difficoltà nascono dal fatto che il modello non riproduce i valori notevolmente diversi che si trovano confrontando le resistività di metalli diversi. Ad esempio, sperimentalmente la resistività del rame è un ordine di grandezza inferiore a quella del piombo alla stessa temperatura, quella del ferro è circa sei volte quella del rame. Nel modello di Drude, è difficile giustificare una simile differenza, perché la velocità degli elettroni non dipende dal tipo di metallo ma solo dalla temperatura, il libero cammino medio è molto simile nei vari metalli, essendo dell'ordine della distanza interatomica, e così pure il numero di elettroni mobili.

Ancora più difficile è spiegare in questo modello perché la presenza di poche impurezze aumenta drasticamente la resistività (per avere una resistività elettrica come quella citata, il rame deve essere puro), dato che i tre parametri da cui la resistività dipende (n , λ , v_m) sono praticamente indipendenti dalla purezza del materiale.

La presenza di impurezze può anche cambiare drasticamente la dipendenza dalla temperatura della resistività, soprattutto se si tratta di impurezze magnetiche, ad esempio aggiungendo al rame 35% di nichel si ottiene una lega detta "costantana" che viene utilizzata proprio perché ha una resistività praticamente indipendente dalla temperatura (vedi fig. 7 dell'articolo [7] già citato).

Infine un'importante misura sperimentale che è in contrasto con il modello di Drude è il calore specifico, che citeremo solo brevemente perché esula dal campo della conduzione elettrica. In breve, l'argomento è il seguente: se effettivamente in un solido conduttore ci fossero tutti quegli elettroni liberi che suppone Drude, essi dovrebbero assorbire energia termica negli urti con gli ioni e quindi dovrebbero dare un contributo importante al calore specifico, che appunto misura la capacità del solido di assorbire energia termica. Viceversa le misure di calore specifico nei metalli mostrano che tale contributo è praticamente inesistente e quindi indicano che la descrizione che dà Drude dell'interazione degli elettroni con gli ioni non è corretta.

Si potrebbe pensare che tutte queste difficoltà si possano sanare raffinando il modello, aggiungendo qualche parametro in più, ma in realtà il problema è di fondo, cioè legato al fatto che la descrizione stessa del moto dell'elettrone nel solido e della sua interazione con gli ioni fatta nel modello di Drude non è adeguata. Queste difficoltà vengono superate nella trattazione quantistica. Dal punto di vista didattico, anche se non si vuole affrontare la trattazione quantistica, può essere comunque utile discutere anche questi casi problematici per mostrare come un buon modello debba interpretare diverse misure in modo consistente e non basti trovare accordi su alcune misure.

Esempio

Facciamo, a titolo di esempio, il calcolo approssimato per il rame a temperatura ambiente (300 K) delle grandezze calcolabili con il modello. Il rame ha, come calcolato prima, $n \approx 10^{29} / \text{m}^3$. Usando le equazioni derivate sopra, calcoliamo, in unità SI:

$$\begin{aligned}\lambda &\approx n^{-1/3} \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ m} \\ v_m &= \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} \approx \sqrt{\frac{3 \cdot 1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9 \cdot 10^{-31}}} \text{ m/s} \approx 10^5 \text{ m/s} \\ \tau &= \frac{\lambda}{v_m} \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ s}\end{aligned}$$

$$\mu = \frac{q}{m_e} \tau \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 2 \cdot 10^{-15} \text{ s}}{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1}$$

$$\sigma = n q \mu \approx 10^{29} \text{ m}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1} \approx 6 \cdot 10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$$

Nella penultima equazione si è tenuto conto delle seguenti relazioni dimensionali, che seguono dalla relazione $J = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-2} = C V$:

$$\text{kg} = J \text{ m}^{-2} \text{ s}^2 = C V \text{ m}^{-2} \text{ s}^2$$

Confrontata con il valore sperimentale, la conducibilità calcolata risulta essere inferiore di circa un fattore 10 che tuttavia non è da considerarsi un grosso fattore vista la rozzezza dell'approssimazione utilizzata nel calcolo di λ .

Misure di laboratorio

Misure di resistenza in funzione della temperatura per vari tipi di metalli e leghe.

Calcoli ed esercizi

- Calcolare λ dal valore di n per i vari tipi di conduttore usati nelle misure.
- Calcolare v_m alla temperatura T del laboratorio.
- Calcolare τ dall'equazione (23) usando i due risultati precedenti.
- Calcolare μ dall'equazione (21), usando il valore di τ calcolato prima, e da questo valore calcolare σ alla temperatura T a cui sono state fatte le misure e confrontarla con i valori calcolati in base alle corrispondenti misure di temperatura.
- Se sono state fatte misure di resistenza elettrica a varie temperature, rappresentare graficamente l'andamento della resistenza elettrica in funzione di T e confrontarlo con le previsioni del modello di Drude.

3. Il modello quantistico nei metalli

Dal punto di vista didattico, l'interesse per esaminare gli aspetti quantistici della conduzione elettrica nei metalli non risiede tanto nel fatto che in questo modo si spiegano alcuni risultati sperimentali che il modello di Drude non riesce a interpretare quanto nel fatto che il fenomeno si presta a discutere in modo relativamente semplice e intuitivo alcuni aspetti di base della meccanica quantistica, che sono interessanti in sé oltre a essere propedeutici alla descrizione della conduzione elettrica nei semiconduttori. In particolare i punti che si prestano alla discussione sono:

- i limiti di applicabilità della meccanica classica,
- l'effetto del principio di indeterminazione,
- l'effetto del principio di esclusione di Pauli,
- la descrizione quantistica del moto nei metalli.

Oltre al modello di Drude discusso nella parte precedente, propedeutica a tutta la trattazione che segue è l'introduzione del concetto di azione e della costante di Planck fatta nel riferimento [2]. Per i primi due punti si tratta di esemplificare, in un fenomeno diverso, quanto è già stato discusso nel riferimento [2] per le vibrazioni della molecola di idrogeno, gli ultimi due punti sono invece nuovi, anche se gli studenti probabilmente conoscono già il principio di esclusione dalla chimica.

3.1 I limiti di applicabilità della meccanica classica

La grandezza che ci aiuta a capire se è lecito usare una descrizione classica del moto è l'azione. È quindi necessario calcolare l'azione tipica del moto dell'elettrone nel metallo secondo la descrizione che ne dà

Drude cioè calcolare, come descritto nel riferimento [2], la *traiettoria nello spazio delle fasi*: ricordiamo infatti che l'azione è l'area racchiusa dalla traiettoria nello spazio delle fasi, cioè nel diagramma delle componenti lungo una certa direzione dello spazio percorso e della quantità di moto. Il calcolo non è particolarmente difficile, gli studenti possono farlo facilmente utilizzando i dati ricavati in precedenza ed è anche un utile esercizio sugli ordini di grandezza. L'unica difficoltà è che, a differenza dei moti discussi nel riferimento [2], il moto dell'elettrone non è unidimensionale, occorre quindi esaminarlo nelle tre direzioni spaziali: è sufficiente però limitarsi a due, la direzione x della corrente e la direzione perpendicolare, che chiameremo y .

Come esempio facciamo esplicitamente il calcolo per un moto simile a quello mostrato in figura 3: supponiamo che la distanza fra gli ioni sia pari a $2 \cdot 10^{-10}$ m e che l'elettrone viaggi con velocità pari alla velocità media termica, calcolata nell'ultimo esempio, per cui la sua quantità di moto p è circa 10^{-25} kg m s $^{-1}$ (trascuriamo l'effetto di una eventuale differenza di potenziale applicata, avendo visto che l'accelerazione dovuta al campo elettrico produce una velocità di deriva che è sempre molto minore della velocità media termica). Riportiamo nuovamente per chiarezza in figura 4 la traiettoria dell'elettrone nelle coordinate (x, y) .

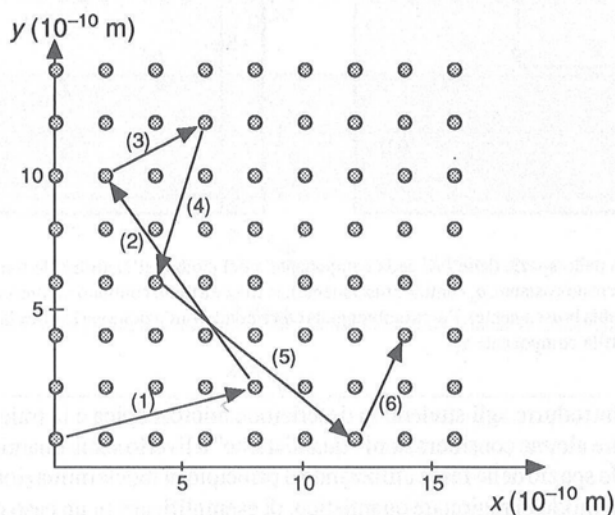


Figura 4. La traiettoria nel piano (x, y) per il moto dell'elettrone rappresentato in figura 3.

Nella figura 5 della pagina seguente sono invece rappresentate le traiettorie nello spazio delle fasi per le componenti x e y del moto, cioè i grafici (x, p_x) e (y, p_y) : le linee tratteggiate raffigurano in modo pittorico ciò che avviene al momento dell'urto, quando la direzione del vettore quantità di moto cambia bruscamente. L'area ombreggiata corrisponde a un'azione pari a circa la metà della costante di Planck h ed è indicata proprio per mettere in evidenza il fatto che l'ordine di grandezza delle azioni che caratterizzano il moto è confrontabile con la costante di Planck: secondo tutte le discussioni fatte in riferimento [2] ci troviamo quindi al di fuori dei limiti di applicabilità della meccanica classica, che è valida solo se l'azione è maggiore del quanto di Planck per molti ordini di grandezza.

3.2 L'effetto del principio di indeterminazione

Le considerazioni fatte sopra servono solo a indicare che non è lecito utilizzare, come si è fatto nel modello di Drude, la meccanica classica per descrivere il moto dell'elettrone nel metallo, però esse non danno indicazioni sul come descriverlo quantisticamente. Si può tuttavia sfruttare tutto l'investimento

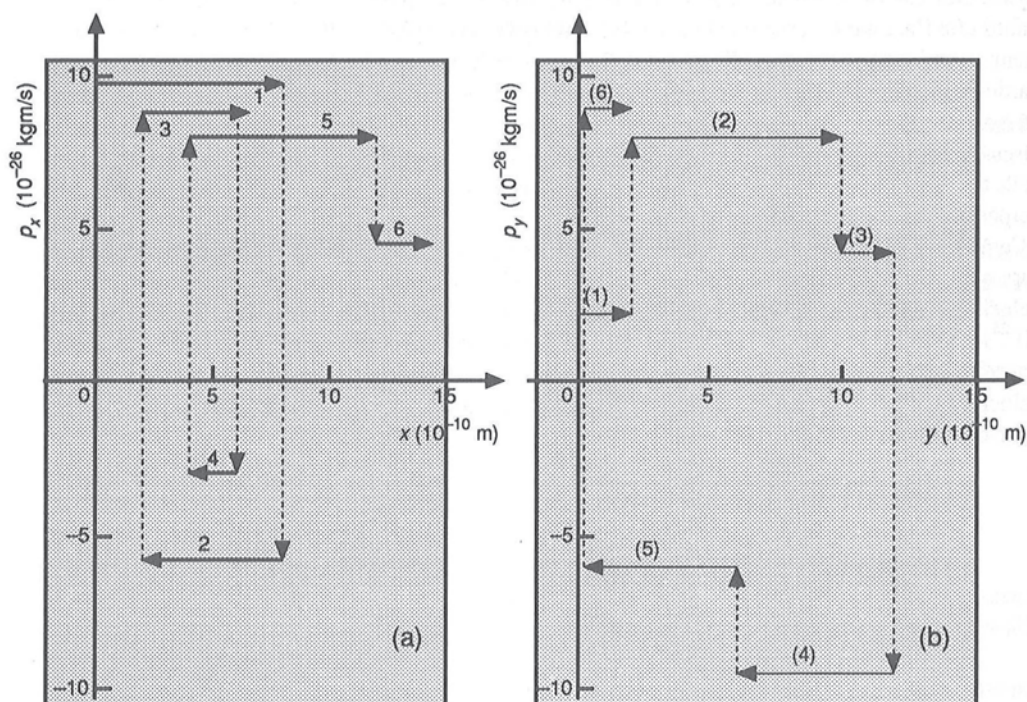


Figura 5. (a) Traiettorie nello spazio delle fasi della componente x del moto dell'elettrone, le frecce tratteggiate rappresentano pittoricamente gli urti (x resta costante, p_x cambia bruscamente), le frecce a tratto continuo rappresentano i vari tratti di volo libero (p_x resta costante, x cambia bruscamente), l'area ombreggiata corrisponde a un'azione pari a circa la metà della costante di Planck; (b) analoga traiettoria della componente y .

di tempo fatto per introdurre agli studenti la descrizione microscopica e la traiettoria nello spazio delle fasi per portarli a fare alcune considerazioni "quantistiche" a livello semi-quantitativo, partendo proprio dalla traiettoria nello spazio delle fasi e utilizzando il principio di indeterminazione. L'obiettivo didattico è di dare un'idea del modo di ragionare quantistico, di esemplificare su un caso concreto le implicazioni di tale principio e di mettere le basi per introdurre il principio di esclusione.

Conviene inizialmente introdurre alcune ipotesi semplificatrici:

- discutere una sola componente (ciò che avviene lungo le altre componenti si può immaginare per analogia),
- ignorare la presenza degli ioni, cioè pensare all'elettrone come "libero",
- richiedere che l'elettrone sia in qualche modo "confinato" a muoversi in una certa zona dello spazio, cioè all'interno di una "scatola" di ben definite dimensioni.

L'ultima richiesta è motivata dal fatto che per calcolare l'azione è necessario che ci sia un'area ben definita nello spazio delle fasi. Poiché, secondo la meccanica quantistica, l'azione è *granulare* con una granularità data dalla costante di Planck, conviene cercare di concretizzare anche solo graficamente il significato di tale granularità, come fatto in figura 6 per il moto lungo la direzione x di un ipotetico elettrone.

Nella figura abbiamo scelto arbitrariamente una "scatola" corrispondente a circa 100 distanze interatomiche (in cui possa cioè stare una catena di 100 atomi) e segnato i bordi che corrispondono a 1, 2, 3 e 4 quanti di Planck nello spazio delle fasi, usando una griglia simile a quella usata in figura 6 di

riferimento [2]. L'intervallo in x non è stato ulteriormente suddiviso, a indicare che non ci interessa conoscere in dettaglio in quale zona particolare all'interno della scatola si trova l'elettrone, viceversa si vede dalla figura che, se l'elettrone ha un moto caratterizzato da un quanto di azione, avrà un valore di p_x dell'ordine di 10^{-26} kg m/s, se ha due quanti p_x sarà in valore assoluto maggiore e ancora maggiore se ha tre o quattro quanti di azione: quindi i vari possibili moti dell'elettrone all'interno della scatola sono differenziabili fra di loro, sulla base dei diversi valori della quantità di moto.

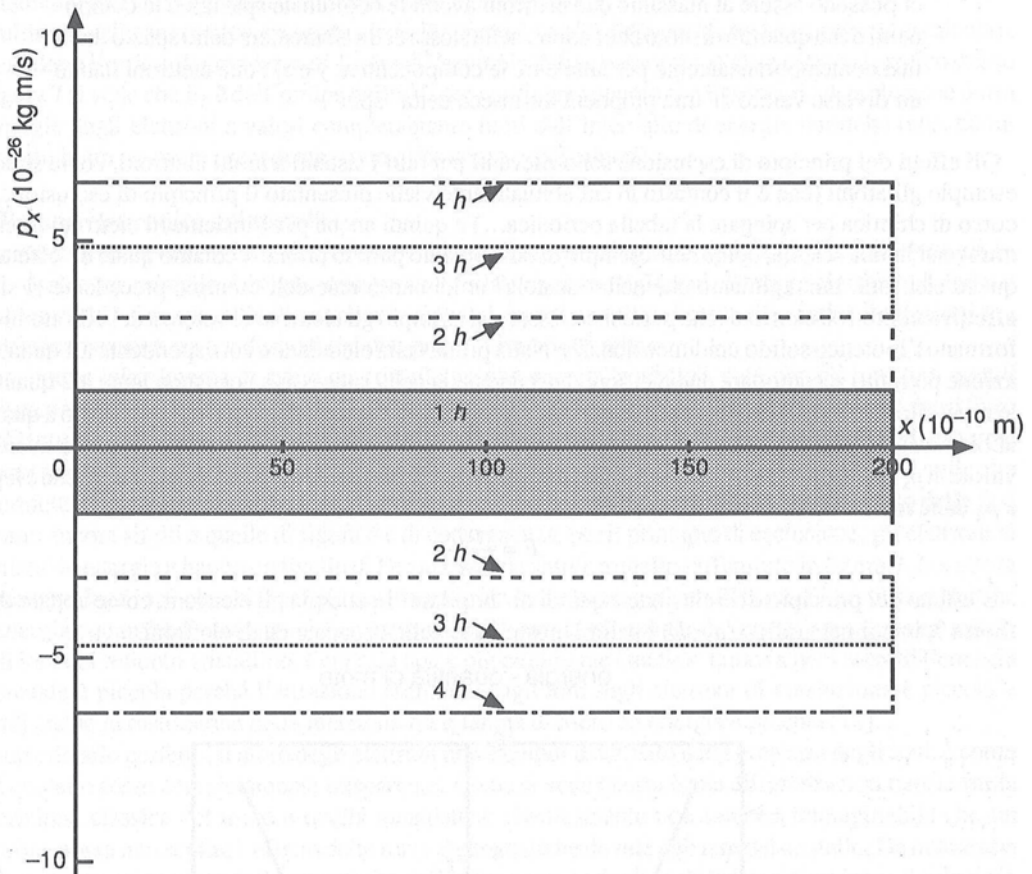


Figura 6. Aree nello spazio delle fasi che corrispondono a 1 quanto di Planck (zona centrale ombreggiata), 2 quanti (bordo segnato dalla linea tratteggiata), 3 quanti (bordo segnato dalla linea puntinata) e 4 quanti (bordo segnato dalla linea a tratto e punto).

La differenza fra la descrizione classica e quella quantistica consiste perciò essenzialmente nel grado di “finezza” con cui si possono distinguere fra di loro due moti: classicamente si potrebbe pensare di distinguere fra di loro anche due elettroni che si muovano nella stessa scatola con valori di p_x che differiscano per molto meno di 10^{-26} kg m/s, quantisticamente invece ciò non è possibile. Questo porta a definire una specie di *cella elementare* dello spazio delle fasi, avente un’area pari a h : due moti che hanno x e p_x all’interno della stessa cella elementare sono *indistinguibili*. In tre dimensioni, la cella elementare va definita lungo tutti e tre gli assi (x, y, z).

3.3 L’effetto del principio di esclusione di Pauli

Il principio di esclusione di Pauli – che fu enunciato da Pauli per spiegare la distribuzione degli elettroni negli atomi – discende dalle proprietà generali del comportamento della funzione d’onda di due particelle

identiche, cioè da quegli aspetti della meccanica quantistica che vanno al di là della semplice ipotesi di granularità dello spazio delle fasi. A livello della trattazione che qui proponiamo per studenti di scuola secondaria non può quindi essere giustificato ma va semplicemente enunciato. L'aver introdotto prima il concetto di cella elementare dello spazio delle fasi aiuta però a rendere la sua introduzione un po' più chiara e capirne meglio gli effetti. L'enunciazione può essere fatta nei seguenti termini:

ci possono essere al massimo due elettroni aventi le coordinate spaziali e le componenti della quantità di moto che cadono nella stessa cella elementare dello spazio delle fasi contemporaneamente per tutte e tre le componenti x , y e z ; i due elettroni hanno un diverso valore di una proprietà intrinseca detta "spin".

Gli effetti del principio di esclusione sono rilevanti per tutti i sistemi a molti elettroni, come sono ad esempio gli atomi (che è il contesto in cui abitualmente viene presentato il principio di esclusione del corso di chimica per spiegare la tabella periodica...) e quindi anche per l'insieme di elettroni liberi di muoversi in una scatola, come nell'esempio di cui abbiamo parlato prima. Vediamo quale è l'effetto su questi elettroni. Immaginiamo che nella "scatola" unidimensionale dell'esempio precedente ci siano effettivamente 100 elettroni (che potrebbero essere ad esempio gli elettroni di valenza dei 100 atomi che formano l'ipotetico solido unidimensionale). Nella prima cella elementare corrispondente a 1 quanto di azione potremo accomodare due elettroni, altri due nella cella successiva corrispondente a 2 quanti di azione, altri due in quella ancora successiva corrispondente a 3 quanti di azione e così via fino a quando abbiamo sistemato tutti e 100 gli elettroni: è evidente che l'ultima coppia di elettroni dovrà avere un valore di p_x molto più elevato e quindi anche un valore molto più elevato di energia cinetica E , che è legata a p_x dalla relazione:

$$E = \frac{p_x^2}{2m_e}$$

L'effetto del principio di esclusione è quindi di "impilare" in energia gli elettroni, come appare dalla figura 7, in cui nel grafico (p_x , E) i pallini mostrano le celle occupate dagli elettroni.

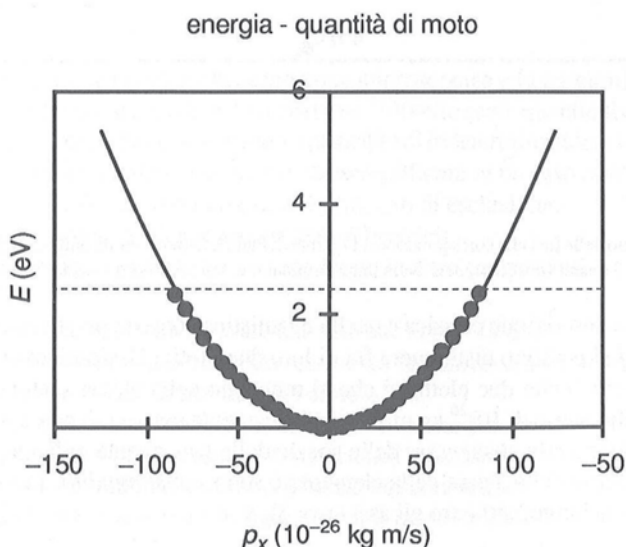


Figura 7. Energia in funzione della componente x della quantità di moto per il sistema di 100 elettroni liberi descritto nel testo, i pallini mostrano pittoricamente dove cadono le celle occupate dagli elettroni (per chiarezza è mostrato solo un elettrone ogni sei), la linea tratteggiata la posizione del livello di Fermi.

Si può quindi far intuire agli studenti, almeno a livello qualitativo, la differenza fra la distribuzione quantistica di energia e quella che si ha in un modello classico come quello di Drude: nel caso classico l'energia media dipende dalla temperatura, in quello quantistico dipende dalla *densità numerica* degli elettroni nella scatola. È un buon esercizio far ripetere agli studenti il calcolo raddoppiando le dimensioni della scatola ma contemporaneamente raddoppiando il numero di elettroni: si vede così che il risultato è indipendente dalle dimensioni della scatola, infatti l'ultima coppia di elettroni va a sistemarsi esattamente alla stessa energia che per la scatola più piccola.

L'ultimo livello energetico occupato viene chiamato il *livello di Fermi* (E_F) ed è istruttivo far calcolare agli studenti l'ordine di grandezza di E_F (vedi l'esempio di fine paragrafo, d'altra parte dal grafico stesso di figura 7 si vede che E_F è dell'ordine dell'eV) per verificare appunto che il principio di esclusione porta le energie degli elettroni a valori completamente fuori dall'intervallo di energie termiche (che, come calcolato in un esempio precedente, sono circa cento volte minori).

3.4 Il moto elettronico nei metalli

Per passare dalla descrizione dell'elettrone libero di muoversi nella scatola a quella dell'elettrone in moto dentro un cristallo, bisogna tener conto della presenza degli ioni. Il modo rigoroso di farlo è complesso [11], tuttavia, a livello qualitativo, alcuni aspetti concettualmente rilevanti della descrizione quantistica possono essere derivati dai due principi introdotti prima.

Si suppone inizialmente di avere un cristallo assolutamente "perfetto", cioè con gli ioni tutti eguali equispaziati fra di loro. Nella nostra descrizione quantistica, un cristallo unidimensionale perfetto fatto di 100 ioni non differisce sostanzialmente dalla scatola unidimensionale di lunghezza pari a 100 distanze interatomiche immaginata nell'esempio precedente: infatti, essendo gli ioni tutti eguali, non c'è nulla che ci permetta di preferire uno ione piuttosto che un altro, quindi le celle elementari nello spazio delle fasi saranno ancora simili a quelle di figura 6 e di conseguenza, per il principio di esclusione, gli elettroni si impilano in energia e hanno un livello di Fermi in modo simile a quello raffigurato in figura 7. Ma allora la presenza degli ioni, che sono carichi positivamente, non ha nessun effetto? Ha un effetto sulla relazione fra energia e quantità di moto, perché, in presenza dell'energia potenziale, dovuta all'attrazione esercitata dagli ioni del reticolo cristallino, l'energia non è più puramente cinetica: tuttavia per i metalli l'energia potenziale è piccola perché l'attrazione esercitata dagli ioni sugli elettroni di conduzione è piccola e quindi anche la distorsione della relazione fra quantità di moto ed energia è piccola [11].

In un cristallo perfetto, il moto degli elettroni non è quindi disturbato dalla presenza degli ioni: è come se il cristallo fosse completamente trasparente! Come si vede questa è una differenza non banale fra la descrizione classica del moto e quella quantistica: classicamente non sarebbe immaginabile che un elettrone possa non sentire l'effetto delle forze elettrostatiche dovute agli ioni del cristallo. Da notare che ciò segue essenzialmente dalla granularità dell'azione e dal principio di indeterminazione: il principio di esclusione di Pauli non entra a questo livello, è importante solo se si vuole sviluppare il modello per spiegare il valore non nullo della resistività, che è indice di una interazione fra l'elettrone e il reticolo cristallino.

Facciamo ora l'ultimo passaggio: con queste premesse, è chiaro che l'interazione fra l'elettrone e gli ioni avviene solo se il cristallo non è perfetto. I motivi di imperfezione sono duplici: possono essere dovuti all'agitazione termica degli ioni, oppure possono derivare dalla presenza di qualche atomo spurio, cioè qualche impurezza. Il secondo effetto è indipendente dalla temperatura e dipende invece dalla purezza del materiale, il che spiega perché il materiale deve essere molto puro per avere bassa resistività anche a temperature bassissime.

Per calcolare l'effetto delle interazioni si calcola la *probabilità di interazione nell'unità di tempo*, che è l'inverso del tempo di rilassamento τ che già Drude aveva definito: il calcolo va fatto utilizzando le equazioni quantistiche del moto, ma il significato di τ è sostanzialmente lo stesso che nel caso classico. Diverso invece, rispetto al caso classico, è l'effetto dell'interazione, per capire il quale occorre riprendere

il grafico di figura 7, tenendo conto della presenza di un campo elettrico, cioè di una differenza di potenziale ai capi del conduttore. Supponiamo che il campo elettrico sia diretto lungo l'asse x nella direzione negativa, come in figura 2: l'azione sugli elettroni è quindi di aumentare in media il valore della componente p_x della quantità di moto. Tutto il grafico di figura 7 si sposta quindi leggermente verso le p_x positive, come mostrato in figura 8, in cui l'effetto è molto ingrandito per chiarezza grafica: rispetto alla situazione in assenza di campo elettrico, c'è un eccesso di elettroni che hanno quantità di moto positive e quindi il valor medio della componente x della velocità è positivo. Questo valor medio positivo coincide con la velocità di deriva v_d che abbiamo definito nel capitolo 2 e che è legata alla corrente dall'equazione (12).

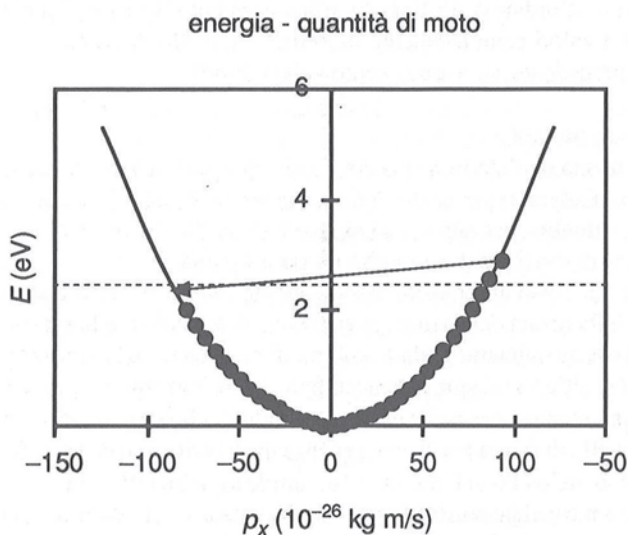


Figura 8. Energia in funzione della componente x della quantità di moto in presenza di un campo elettrico per lo stesso sistema di figura 7: la freccia indica una possibile transizione in seguito a un'interazione.

L'effetto di un'interazione è di cambiare la cella elementare nello spazio delle fasi in cui si trova l'elettrone, il che significa cambiare il valore di p_x . Qui entra in gioco il principio di esclusione. L'elettrone deve infatti avere disponibile una cella non occupata da altri elettroni e corrispondente a un'energia prossima a quella che aveva prima dell'urto ed è evidente dalla figura che solo gli elettroni che si trovano ad avere un valore prossimo al p_x massimo e positivo hanno disponibili celle vuote di energia simile che corrispondono però di preferenza a valori di p_x negativi, dove ci sono molti posti vuoti intorno all'energia di Fermi. L'interazione fa perciò fare all'elettrone una transizione simile a quella indicata nella figura dalla freccia: classicamente diremmo che l'elettrone "rimbalza" all'indietro.

Il risultato netto è che per effetto delle interazioni l'eccesso di elettroni aventi p_x positivi si mantiene costante, perché essi vengono continuamente rimbalzati indietro per poi essere accelerati e riportati in avanti dall'azione del campo elettrico: quindi anche il valor medio di v_d resta costante e con esso la corrente, come vuole la legge di Ohm. Il modello quantistico spiega quindi la legge di Ohm e giustifica anche la dipendenza della resistenza elettrica dalla purezza del materiale e dalla temperatura come emerge dalle misure sperimentali [12].

Esempio

Nell'ipotesi di avere una scatola con una larghezza $l = 20$ nm, come quella di figura 6 (100 ioni a una distanza interatomica di 0,2 nm), il bordo superiore in p_x corrispondente alla prima cella (un quanto di Planck) cade a:

$$p_{xl} = \frac{h}{2l} \approx \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{4 \cdot 10^{-8} \text{ m}} \approx 1,6 \cdot 10^{-26} \text{ kg m / s}$$

Il bordo inferiore cade al valore eguale in valore assoluto ma di segno opposto, per cui la larghezza della cella lungo l'asse p_x è pari al doppio di p_{xl} . Dovendo disporre in celle diverse, per il principio di esclusione di Pauli, 50 coppie di elettroni, il bordo superiore della 50ª cella giungerà a:

$$p_{x50} = 50p_{xl} \approx 0,8 \cdot 10^{-24} \text{ kg m / s}$$

L'energia corrispondente è l'energia E_F del livello di Fermi:

$$E_F = \frac{p_{x50}^2}{2m_e} \approx \frac{0,6 \cdot 10^{-48} \text{ Js}}{2,9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \approx 3,10 \cdot 10^{-19} \text{ J} \approx 2 \text{ eV}$$

Potete ripetere il calcolo con un numero diverso di ioni e troverete lo stesso valore se mantenete la stessa distanza interatomica.

4. La conduzione elettrica nei semiconduttori

4.1 Premessa

A differenza dei metalli, non esiste per i semiconduttori un modello classico che possa rendere conto delle peculiari caratteristiche della conduzione elettrica e la descrizione quantistica rigorosa richiede concetti che vanno ben al di là di ciò che si può ragionevolmente fare in una scuola secondaria. D'altra parte l'interesse di poter interpretare, almeno a livello qualitativo, tali peculiari caratteristiche è forse più grande ancora che per i metalli, date le numerosissime applicazioni dei semiconduttori in particolare ai dispositivi elettronici e optoelettronici.

Nella proposta che segue mostreremo alcuni aspetti che si possono introdurre sfruttando i concetti discussi a proposito della conduzione nei metalli e che sono sufficienti per illustrare, almeno a livello qualitativo, le caratteristiche della conduzione elettrica in questi materiali: ci limitiamo essenzialmente al concetto di *banda di energia proibita*, che è propedeutico a tutta la descrizione di tali caratteristiche e quindi alla comprensione del funzionamento dei dispositivi. Il percorso che proponiamo si sviluppa in tre passi:

- si parte dall'evidenza sperimentale che mostra che i materiali semiconduttori hanno una diversa dipendenza dalla temperatura della resistenza elettrica rispetto ai metalli;
- si introduce l'idea di una *soglia di energia per la conduzione elettrica*;
- si aggancia ad essa il concetto di *banda di energia*.

A questi si può aggiungere un passo finale, che tuttavia non discuteremo, in cui si discute un modello statistico basato sulla distribuzione di Boltzmann per spiegare la legge di dipendenza esponenziale della resistenza elettrica dall'inverso della temperatura che si osserva nei dati sperimentali.

4.2 L'evidenza sperimentale

Sarebbe utilissimo iniziare con misure sperimentali dirette di resistenza elettrica eseguite su materiali semiconduttori di dimensioni geometriche note da cui poter ricavare il valore della resistività elettrica, in modo simile a quello che si segue per i metalli.

Queste misure tuttavia non sono così facili come per i metalli perché non è così facile reperire campioni di semiconduttori. In mancanza di misure dirette, conviene fare almeno un'analisi dei valori di resistività tipici dei semiconduttori usando i dati che si trovano in letteratura e confrontarli con quelli dei metalli: dal confronto si vede che i semiconduttori sono caratterizzati dall'avere resistività molto maggiori di quelle dei metalli.

L'evidenza sperimentale diretta che utilizziamo proviene invece da misure di dipendenza dalla temperatura della conducibilità elettrica di semiconduttori, che sono accessibili anche a livello di scuola secondaria, come illustrato nell'articolo [7]. I campioni usati sono termistori NTC, come illustrato nella scheda 6 di riferimento [7] oppure componenti commerciali a semiconduttore come i transistor unigiunzione usati nella scheda 7 dello stesso riferimento. Nel primo caso la resistenza diminuisce monotonicamente al crescere della temperatura (fig. 8 dell'articolo [7]), nel secondo caso si osserva, a basse temperature, un andamento simile a quello osservato nei metalli, mentre ad alte temperature la dipendenza è invertita (fig. 12 dell'articolo [7]).

Questa analisi qualitativa è sufficiente per trarre una prima conclusione: i semiconduttori sono materiali in cui l'aumento della temperatura favorisce la conduzione dell'elettricità anziché deprimerla come avviene nei metalli. Se la programmazione didattica lo consente, è sicuramente utile approfondire l'analisi a livello quantitativo. Per l'indagine quantitativa, le scale adatte per rappresentare l'andamento sono quelle utilizzate nelle figure 9 e 13b e cioè l'inverso della temperatura assoluta T per l'asse delle ascisse e il logaritmo naturale della resistenza elettrica R per quello delle ordinate. In queste scale infatti l'andamento è lineare e quindi la legge quantitativa è di questo tipo:

$$\ln R = \ln R_0 + \frac{A}{T} \quad (27)$$

dove A è una costante che dipende dal materiale.

Questa legge può essere utilizzata a diversi livelli di approfondimento. Un primo livello si può basare su una semplice analisi dimensionale: risulta infatti evidente che il parametro A ha le dimensioni di una temperatura. Inoltre, come mostrato in riferimento [7], il valore di A non è molto diverso per i diversi materiali semiconduttori (ad esempio è circa 3700 K per il termistore usato nella misura, 4500 K per il germanio, 7000 K per il silicio) e ciò è già di per sé significativo perché sottolinea la vicinanza di comportamento fra i diversi semiconduttori.

Si può passare a un secondo livello di approfondimento se gli studenti conoscono, ad esempio dalla teoria cinetica dei gas, il significato della costante k_B di Boltzmann, che permette di passare da unità di temperatura assoluta a unità di energia e quindi di trasformare la "temperatura caratteristica" A in una "energia caratteristica" E_A del semiconduttore [13]. Infatti, sapendo che k_B è pari a $1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$, si ottengono valori di E_A che sono dell'ordine di 10^{-19} J , ovvero 0,5 eV: questo è un ordine di grandezza per le energie caratteristiche dei semiconduttori che è utile avere in mente perché rende meno vaga la discussione che segue sulla banda di energia proibita.

Il terzo livello di approfondimento è decisamente più impegnativo: consiste nell'analisi in termini di distribuzione di Boltzmann a cui abbiamo accennato sopra e come viene anche sviluppato nell'articolo [7].

4.3 Soglia di energia

Si tratta ora di sviluppare il modello (microscopico e quantistico) della conduzione dell'elettricità nei solidi per spiegare perché nei semiconduttori l'aumento di temperatura favorisce la conducibilità elettrica anziché deprimerla come avviene nei metalli.

Conviene fare una riflessione preliminare sull'ordine di grandezza della differenza di conducibilità elettrica fra metalli e semiconduttori, che come ricordato sopra è molto grande, richiamando la relazione principale che lega la conducibilità elettrica ai parametri caratteristici del materiale e che noi abbiamo derivato nella discussione del modello di Drude (vedi eq. 22). La riportiamo per comodità:

$$\sigma = nq^2 \frac{\tau}{m_e}$$

I due parametri importanti sono il tempo di rilassamento τ e la densità elettronica n . Per il primo fattore non ci aspettiamo delle differenze enormi fra metalli e semiconduttori, sia come ordini di grandezza sia come dipendenza dalla temperatura. In particolare, come si è visto nel capitolo precedente, l'aumento

della temperatura gioca negativamente su τ perché fa aumentare l'energia di agitazione termica degli ioni e ciò rompe la perfetta regolarità del reticolo dando origine a urti: non c'è nessun motivo di pensare che l'aumento di temperatura debba giocare diversamente nei semiconduttori.

Quindi le differenze sia nell'ordine di grandezza della conducibilità sia nel diverso comportamento al variare della temperatura vanno ricercate nelle diversità dell'altro fattore, cioè n : in particolare l'aumento della conducibilità al crescere della temperatura osservato nei dati sperimentali discussi prima va attribuito a un aumento di n . Poiché aumento di temperatura significa in generale aumento di energia, ne concludiamo che nei semiconduttori *aumentare l'energia degli elettroni significa mettere più elettroni nelle condizioni in cui possono condurre l'elettricità*.

Questo ragionamento qualitativo conduce al concetto di *soglia di energia* per la conduzione elettrica: solo gli elettroni che hanno un valore di energia che supera una certa soglia si comportano in modo simile

agli elettroni di un metallo. Il concetto di soglia è legato strettamente a quello di *banda di energia*: se infatti esiste una soglia per la conduzione dell'elettricità significa che esistono delle "bande energetiche" ben distinte, come quelle indicate schematicamente in figura 9: la banda di energia più elevata corrisponde alle condizioni in cui gli elettroni conducono (*banda di conduzione*) e viene raggiunta dalla banda di energia inferiore (*banda di valenza*) superando un intervallo di energie in cui non ci sono stati permessi agli elettroni (*banda di energie proibite*).

Dalla figura si vede chiaramente che la *soglia di energia* da superare è la differenza fra la cima (E_v) della banda di valenza e il fondo (E_c) della banda di conduzione, perché questa è l'energia minima che gli elettroni debbono acquistare per passare da una banda all'altra. Tale energia deve essere dell'ordine di grandezza dell'energia E_A caratteristica del semiconduttore, che avevamo trovato

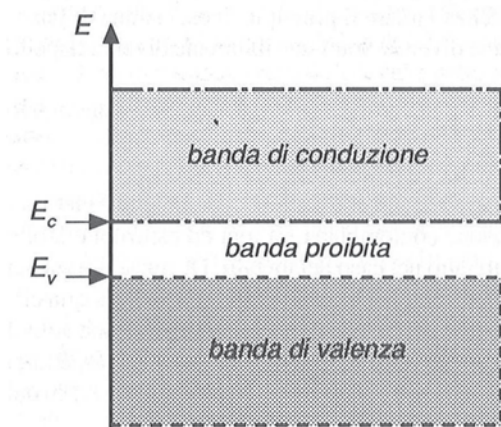


Figura 9. Bande di energia in un solido: nella banda superiore (banda di conduzione) l'energia è maggiore di E_c e gli elettroni sono mobili come nei metalli, in quella inferiore (banda di valenza) l'energia è minore di E_v e gli elettroni non sono mobili.

dall'analisi dei dati sperimentali: poiché il valore di E_A che si ottiene dai dati sperimentali è dell'ordine di grandezza dell'eV, ciò indica che la distanza fra le due bande deve essere di quest'ordine e useremo appunto questa indicazione per il modello che discuteremo qui di seguito per giustificare la formazione di questa banda proibita.

4.4 Bande di energia

Ci sono essenzialmente due approcci per introdurre le bande di energia nei solidi, che si trovano descritti nei testi di fisica dello stato solido [14]: entrambi presentano difficoltà non banali per la trasposizione a livello di scuola secondaria.

Nel primo approccio si parte dai livelli di energia discreti degli atomi, cioè dal fatto che negli atomi solo alcuni valori di energia sono *permessi*, mentre tutti gli altri sono *proibiti*. Si mostra poi come i livelli permessi si allarghino in bande quando si legano insieme più atomi per formare il solido: si formano quindi *bande di energie permesse* intervallate da *bande di energie proibite*. Se gli studenti conoscono già, perché discussi in altri contesti, i livelli di energia discreti atomici, questo approccio può essere più economico in termini di tempo e di propedeuticità: la formazione delle bande a partire dai livelli energetici può essere giustificata ad esempio con modelli come quello discusso nel riferimento [15] che fa ricorso all'analogia con gli oscillatori accoppiati.

Nel secondo approccio si parte invece dal modello quantistico di descrizione del moto di un elettrone libero e si discutono gli effetti che su di esso ha la presenza di un reticolo di ioni posti a distanze regolari nello spazio a causa dell'attrazione coulombiana che essi esercitano. Questo approccio può essere più conveniente se gli studenti hanno discusso, anche solo a livello qualitativo come abbiamo fatto nel capitolo precedente, un modello quantistico di conduzione elettrica nei metalli. Discuteremo quindi una possibile presentazione di questo modello mettendo in evidenza i passaggi difficili.

Il punto di partenza è la figura 8 che mostra pittoricamente come tutto il fenomeno della conduzione elettrica nei metalli si gioca, nel modello quantistico, intorno al livello di Fermi. Infatti, secondo il modello, la corrente elettrica si forma perché l'intera distribuzione delle celle occupate si sposta, in presenza del campo elettrico, verso valori più alti di p_x , il che sbilancia la distribuzione e produce un valor medio della componente della quantità di moto diversa da zero e quindi una *velocità di deriva* non nulla. Ma ciò può avvenire solo perché ci sono delle celle libere proprio intorno ai valori massimi di p_x che possono perciò venire via via occupate dagli elettroni senza violare il principio di esclusione di Pauli.

Nei semiconduttori è proprio questa situazione ad essere diversa. Sono sensibilmente diversi, rispetto ai metalli, due aspetti:

- la relazione fra energia e quantità di moto, cioè le curve delle figure 7 e 8 lungo le quali si dispongono le celle occupabili dagli elettroni,
- il livello di occupazione effettiva delle celle da parte degli elettroni.

Vediamo il primo aspetto. I semiconduttori sono formati da atomi che hanno generalmente 4 elettroni di valenza: confrontati con i metalli, l'energia di attrazione coulombiana fra ioni ed elettroni è molto maggiore e non può più essere trascurata come avevamo fatto nel caso dei metalli. Di conseguenza nei semiconduttori l'energia potenziale dà un importante contributo all'energia totale (che è l'energia che viene riportata nei grafici delle figure 7 e 8), mentre per i metalli tenevamo in considerazione solo il contributo dell'energia cinetica: questo è in sostanza il primo motivo per il quale non possiamo aspettarci che la relazione fra energia e quantità di moto sia la stessa in un metallo o in un semiconduttore. Fin qui il ragionamento è però simile a quello che si farebbe in meccanica classica.

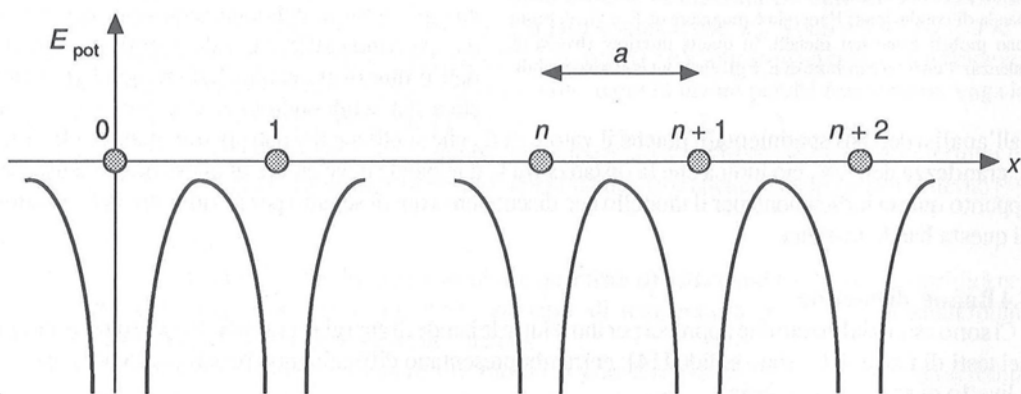


Figura 10. Andamento semplificato dell'energia potenziale E_{pot} degli elettroni di valenza in una catena unidimensionale di ioni, i cerchietti rappresentano le posizioni degli ioni, a è la distanza interatomica.

Vediamo ora in che cosa si discosta il ragionamento quantistico. Limitiamoci per semplicità alla catena unidimensionale di moltissimi ioni perfettamente identici di cui abbiamo già discusso prima. In figura 10 rappresentiamo in modo pittorico, semplicemente ai fini di rendere la discussione più intuitiva, un ipotetico andamento dell'energia potenziale in funzione della posizione x lungo la catena unidimensionale di ioni: la sua caratteristica è che esso si ripete in modo identico quando ci si sposta di una distanza pari

a una distanza interatomica a o a un suo multiplo intero (per semplicità abbiamo immaginato che in una zona più ristretta intorno alla posizione dello ione l'attrazione è più forte e quindi l'energia potenziale più negativa, mentre nei tratti fra gli ioni essa è meno forte).

Vediamo ora quale è l'andamento della quantità di moto p_x in questo sistema. Immaginiamo un elettrone che si muova lungo la catena secondo le leggi della meccanica classica: la sua velocità è maggiore nei tratti in prossimità degli ioni e minore nei tratti fra uno ione e l'altro, visto l'andamento dell'energia potenziale, quindi anche p_x non è più costante, a differenza di quel che avveniva per l'elettrone di conduzione in un metallo (in assenza di campo elettrico e ignorando possibili urti, vedasi al riguardo la discussione fatta nel paragrafo 3.3). Secondo la meccanica quantistica invece è ancora possibile definire dei valori di p_x costanti, come conseguenza dell'andamento periodico nello spazio dell'energia potenziale. La giustificazione rigorosa di questa affermazione è complessa, ma possiamo darne una intuitiva, basandoci sul fatto che la periodicità dell'energia potenziale implica che non c'è nessun modo di accorgersi, dal valore dell'energia potenziale, se l'elettrone si trova in prossimità ad esempio del 50° ione o del 54° o del 22° ione o di un qualunque altro ione: avevamo già fatto una considerazione simile tracciando le celle dello spazio delle fasi di figura 6, basandoci sul fatto che in quel caso tutte le posizioni all'interno della catena di ioni erano equivalenti per effetto del principio di indeterminazione. Ora possiamo estenderla al nostro caso, aggiungendo soltanto che l'equivalenza vale purché le posizioni differiscano per multipli interi della distanza interatomica a : vale quindi, anche per i semiconduttori, una rappresentazione delle celle elementari del tutto simile a quella di figura 6 per i metalli, con tutte le conseguenze che ne avevamo tratto.

L'aspetto nuovo (che esiste anche per i metalli ma di cui non ci siamo occupati prima perché nei metalli si resta distanti dai valori di p_x per i quali l'effetto è importante) è che la relazione fra p_x e l'energia totale non è più la semplice relazione parabolica raffigurata in figura 7 ma diventa più complessa. Un tipico esempio, molto semplificato, è mostrato in figura 11, in cui i valori di p_x e dell'energia sono indicati puramente per dare un'idea degli ordini di grandezza (gli andamenti reali sono notevolmente più complessi e possono essere molto diversi nei diversi materiali oppure addirittura nello stesso materiale

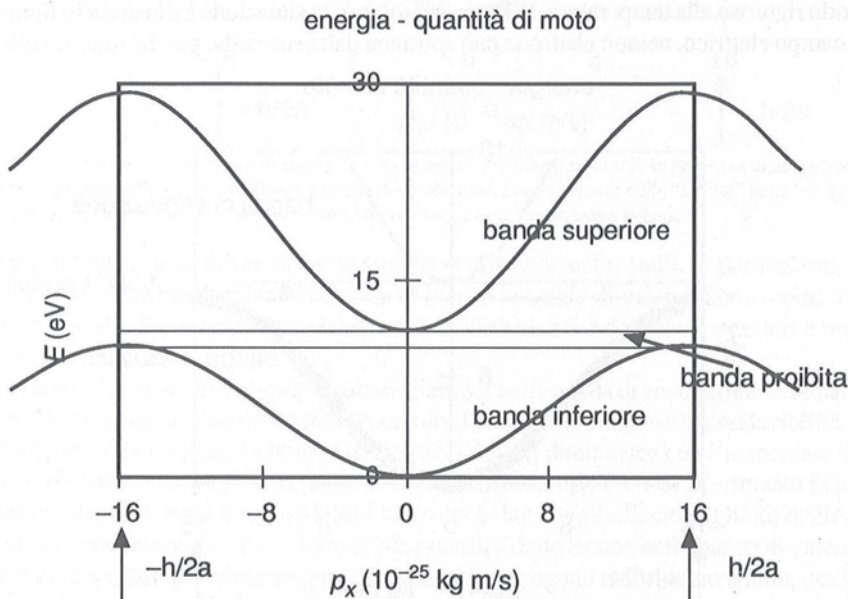


Figura 11. Come si modifica la relazione fra l'energia e la quantità di moto dell'elettrone, mostrata in figura 7, se si tiene conto dell'energia potenziale dovuta all'attrazione degli ioni: la linea orizzontale tratteggiata indica il massimo della banda inferiore, quella a tratto continuo indica il minimo della banda superiore.

lungo direzioni diverse). A noi interessa commentare soltanto alcune caratteristiche che sono molto generali e che ci fanno capire i comportamenti discussi sopra. Le curve infatti mostrano chiaramente come si formino le *bande di energia*. Prendiamo ad esempio la curva inferiore: i valori di p_x intorno allo zero corrispondono alle energie più basse, poi man mano che p_x cresce in valore assoluto anche l'energia aumenta con una legge che inizialmente fa pensare proprio alla legge parabolica che si aveva nel caso di figura 7. L'aumento però diventa via via meno rapido, rispetto all'andamento della legge parabolica di figura 7, finché si raggiunge un *massimo* dell'energia in corrispondenza di valori p_x pari a $h/2a$ e $-h/2a$. Ne segue che l'energia varia solo all'interno della *banda ristretta* che va da zero a questo valore massimo (indicato nella figura dalla linea orizzontale inferiore). La curva superiore rappresenta una nuova *banda di energie permesse*, che parte da un valore *minimo* di energia indicato nella figura dalla linea orizzontale superiore, segue un andamento analogo a quello della banda inferiore fino a raggiungere a sua volta un massimo. Fra la banda superiore e quella inferiore c'è un intervallo di energie che non si possono ottenere per nessun valore di p_x e nella quale possiamo riconoscere la *banda di energie proibite* di figura 9.

4.5 Bande di energia e principio di Pauli

Il formarsi delle bande di energia di per sé non basta a spiegare il diverso comportamento fra metalli e semiconduttori: le bande infatti si formano in tutti i solidi cristallini, siano essi semiconduttori o metalli o isolanti, come è abbastanza ovvio anche solo in base agli argomenti qualitativi che abbiamo discusso sopra. La differenza principale fra i diversi tipi di materiali consiste nel modo in cui le bande vengono occupate. Tranne poche eccezioni, nei metalli gli elettroni di conduzione arrivano ad occupare solo una parte della banda e quindi la loro energia resta molto distante dal bordo superiore, per cui non si avvicina alla zona di valori "proibiti": questo è il motivo per cui nei metalli non è stato discusso il fatto che esiste un limite superiore all'energia, perché normalmente gli elettroni di conduzione non lo possono raggiungere attraverso l'accelerazione dovuta a un campo elettrico. La caratteristica dei semiconduttori è invece di avere completamente occupata la banda energetica degli elettroni di valenza fino al bordo superiore.

Esaminiamo prima il caso in cui effettivamente la banda è completamente occupata (il che succede soltanto in modo rigoroso alla temperatura dello *zero assoluto*): la situazione è illustrata in figura 12. Se si applica un campo elettrico, nessun elettrone può spostarsi dalla sua cella, perché tutte le celle vicine

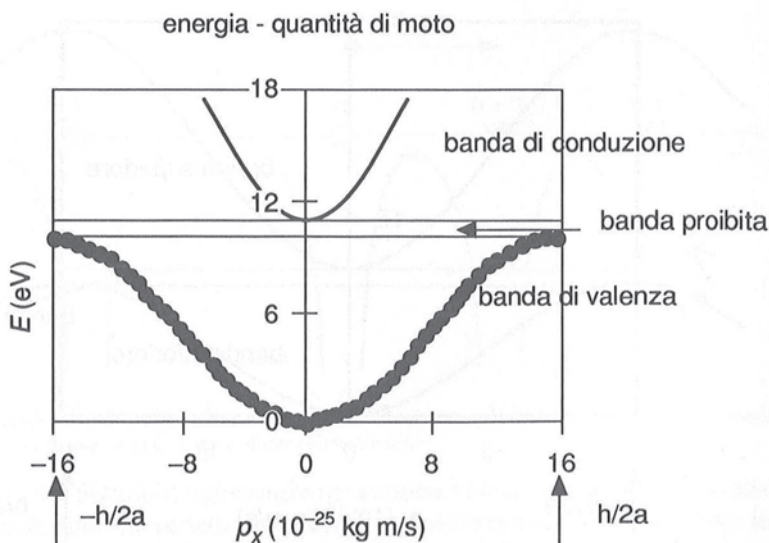


Figura 12. Riempimento delle bande di energia in un semiconduttore alla temperatura dello zero assoluto (i pallini rappresentano gli elettroni): la banda di valenza è completamente occupata, quella di conduzione è completamente vuota, nessun elettrone può spostarsi perché non può acquistare energia sufficiente per attraversare la banda di energie proibite.

sono già occupate: ne segue che tutta la distribuzione dei valori di p_x resta invariata, quindi il valor medio di p_x resta nullo e anche la corrente è nulla, cioè il materiale è un perfetto *isolante*.

A temperatura più alta invece alcuni elettroni riescono ad acquistare abbastanza energia negli urti contro il reticolo per passare alla banda di energia superiore, in cui ci sono moltissime celle libere. L'effetto sulla conducibilità è duplice, come si vede dalla figura 13: da un lato gli elettroni che sono passati nella banda di conduzione possono condurre proprio come gli elettroni dei metalli perché hanno molte celle libere a valori dell'energia e di p_x più alti verso cui possono spostarsi, dall'altro anche gli elettroni della banda di valenza possono spostarsi verso valori dell'energia e di p_x più alti grazie alle celle lasciate libere (le celle lasciate libere vengono chiamate *lacune*, proprio perché sono dei "posti vuoti" che possono ospitare gli elettroni). In media la distribuzione dei valori di p_x risulta quindi spostata verso destra, sia nella banda di valenza sia in quella di conduzione, e il suo valor medio è positivo: ne segue che la velocità media degli elettroni è diversa da zero lungo la direzione x e quindi che c'è una *corrente* in questa direzione, proprio come succede nei metalli.

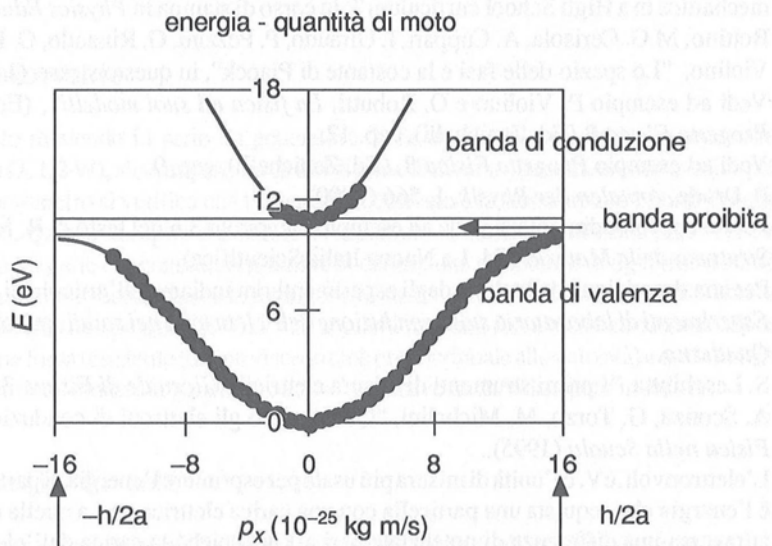


Figura 13. La stessa distribuzione che in figura 12 ma a temperature maggiori di 0 K in presenza di un campo elettrico: alcuni elettroni sono passati dalla banda di valenza a quella di conduzione, hanno lasciato delle "lacune" nella banda di valenza e tutta la distribuzione di celle occupate si sposta verso i valori positivi di p_x in entrambe le bande.

Ci sono tuttavia grosse differenze rispetto alla conduzione nei metalli, in particolare:

- gli elettroni nella banda di conduzione e le *lacune* in quella di valenza sono molto meno numerosi che nei metalli, il che spiega perché la conducibilità elettrica dei semiconduttori è molto minore di quella dei metalli;
- dato che c'è bisogno di energia per portare elettroni nella banda di conduzione e lasciare delle lacune in quella di valenza, l'aumento di temperatura favorisce fortemente la conducibilità elettrica e ciò spiega perché la resistenza elettrica dei semiconduttori diminuisce con l'aumentare della temperatura, come osservato negli esperimenti descritti nelle schede 6 e 7 di riferimento [7];
- la corrente elettrica nei semiconduttori è dovuta a due contributi, cioè al moto degli elettroni nella banda di conduzione e al moto dovuto alla presenza delle lacune nella banda di valenza: i due moti non sono separati spazialmente, perché entrambi avvengono nello stesso solido, ma hanno caratteristiche diverse perché è diversa l'energia degli elettroni nelle due bande ed è diversa la relazione fra l'energia e la quantità di moto (come del resto si vede anche dalla fig. 13); nei semiconduttori si parla quindi di una "corrente di elettroni" e di una "corrente di lacune".

Il modello quindi, sia pure a livello puramente qualitativo e in modo molto semplificato, rende conto delle differenti caratteristiche della conduzione elettrica fra metalli e semiconduttori. Dal punto di vista didattico, a fronte delle indubbie difficoltà dell'introduzione del modello, gli aspetti positivi di questa presentazione sono, fra gli altri, di mostrare, in un contesto diverso da quello forse più usuale della fisica atomica, gli effetti combinati del principio di esclusione di Pauli da un lato e della granularità dell'azione e della costante di Planck dall'altro.

Bibliografia e note

- [1] A. Sconza, G. Torzo, "An undergraduate laboratory experiment for measuring the energy gap in semiconductors", *European Journal of Physics*, 10 (1989), p. 123; A. Sconza "Il trasporto della carica elettrica nei solidi", *Il libro del XXXII Congresso AIF* (Montesilvano, 1993), Suppl. n. 1 di *La Fisica nella Scuola* (1996).
- [2] A. Cuppari, G. Rinaudo, O. Robutti, P. Violino, "Gradual introduction of some aspects of quantum mechanics in a High School curriculum", in corso di stampa in *Physics Education*, vedi anche: C. Bottino, M.G. Cerisola, A. Cuppari, I. Giraud, P. Pezzini, G. Rinaudo, O. Robutti, S. Varano, P. Violino, "Lo spazio delle fasi e la costante di Planck", in questo stesso *Quaderno*.
- [3] Vedi ad esempio P. Violino e O. Robutti, *La fisica e i suoi modelli*", (Ed. Zanichelli), oppure *Progetto Fisica B* (Ed. Zanichelli), cap. 12.
- [4] Vedi ad esempio *Progetto Fisica B*, (Ed. Zanichelli), cap. 9.
- [5] P. Drude, *Annalen der Physik*, 1, 566 (1900).
- [6] Per un approfondimento si veda ad esempio il capitolo 3.6 del testo di R. Fieschi e R. De Renzi, *Struttura della Materia* (Ed. La Nuova Italia Scientifica).
- [7] Per una descrizione dettagliata degli esperimenti rimandiamo all'articolo di A. Sconza e G. Torzo *Esperimenti di laboratorio sulla conduzione dell'elettricità nei solidi*, pubblicato in questo stesso *Quaderno*.
- [8] S. Leschiutta, "I primi strumenti di misura elettrici", *Giornale di Fisica*, 34, 279 (1993).
- [9] A. Sconza, G. Torzo, M. Michelini, "Quanti sono gli elettroni di conduzione dei metalli?", *La Fisica nella Scuola* (1995).
- [10] L'elettronvolt, eV, è l'unità di misura più usata per esprimere l'energia di particelle microscopiche: è l'energia che acquista una particella con una carica elettrica pari a quella dell'elettrone quando attraversa una differenza di potenziale pari a 1 V. Poiché la carica dell'elettrone è $1,6 \cdot 10^{-19}$ C, 1 eV corrisponde a $1,6 \cdot 10^{-19}$ J.
- [11] Per un approfondimento sulla trattazione quantistica del moto elettronico nei cristalli rimandiamo al cap. 3.5 del testo di Fieschi e De Renzi. Nella presentazione che suggeriamo di proporre agli studenti conviene ignorare il fatto che, in alcuni metalli e nei semiconduttori "drogati p", la conduzione elettrica è meglio descritta come moto di lacune che portano una carica positiva anziché come moto di elettroni.
- [12] Il modello che abbiamo discusso si applica bene a metalli che siano buoni conduttori come il rame, occorre però fare attenzione a non applicarlo indiscriminatamente in tutte le situazioni, in particolare se si tratta di leghe metalliche oppure di metalli, come quelli magnetici, in cui l'interazione degli elettroni con gli ioni del reticolo non segue la semplice legge discussa nel testo.
- [13] Quella che nel testo abbiamo chiamato "energia caratteristica" E_A corrisponde alla metà della larghezza E_g della banda di energie proibite, come mostrato anche nella scheda 7 di riferimento [7].
- [14] Per un approfondimento del primo approccio rimandiamo ad esempio al paragrafo 3.5.3 e in particolare alla figura 3.25 del testo di Fieschi e De Renzi, per il secondo al paragrafo 3.5.8 e in particolare alle figure 3.31 e 3.32 del medesimo testo.
- [15] A. Sconza, "I circuiti oscillanti accoppiati: un'analogia classica per la formazione delle bande di energia nei solidi", *La Fisica nella Scuola*, XXIX, 72 (1996).