

A. SCONZA*, G. TORZO*^o

* Dipartimento di Fisica "G. Galilei",
Università di Padova
^o ICIS-CNR e INFM

Il freno elettromagnetico: un altro esperimento sulla legge di Lenz

(Pervenuto il 22.04.01, approvato il 21.09.01)

ABSTRACT

An experiment on electromagnetic braking with Real Time Laboratory, using a motion detector and a force sensor, allows measurements of the force acting on a magnet falling inside a metal tube and its velocity versus time, giving opportunities for modelling transient phenomena.

Introduzione

Le correnti indotte circolano in verso tale da opporsi alla causa che le ha generate: questo fatto è noto come legge di Lenz ed è espresso analiticamente dal segno negativo (-) nelle leggi dell'induzione elettromagnetica:

$$E = - d\Phi_B/dt \quad (1)$$

e

$$I = - 1/R d\Phi_B/dt \quad (2)$$

che danno rispettivamente la f.e.m. E e la corrente indotta I in termini della variazione temporale $d\Phi_B/dt$ del flusso del vettore B . Ad esempio una spira metallica che entra in (o esce da) una regione dove è presente un campo magnetico uniforme è soggetta ad una variazione di flusso (finché non è tutta entrata o completamente uscita dal campo) e quindi diventa sede di una corrente indotta ed il verso di tale corrente è tale da dar luogo, interagendo col campo magnetico, ad una forza frenante, cioè che si oppone alla causa della variazione di flusso stessa (il movimento della spira).

Un secondo esempio è il cosiddetto pendolo di Waltenhofen, un pendolo realizzato con una paletta metallica le cui oscillazioni sono fortemente smorzate quando avvengono in una zona in cui è presente un campo magnetico disuniforme: in questo caso le correnti indotte (correnti di Foucault) circolano entro il metallo. Tali correnti sono molto ridotte se nella paletta si praticano dei tagli radiali, e in tal caso lo smorzamento risulta altrettanto ridotto.

Un terzo esempio è un magnete che scivola su un piano inclinato metallico e che rapidamente raggiunge un moto a velocità costante.

In tutti questi casi la forza frenante è proporzionale alla velocità relativa fra l'oggetto che si muove e la sorgente del campo magnetico e su questo principio sono realizzati molti dispositivi di frenamento elettromagnetico.

Un apparato sperimentale che si presta a misure quantitative è stato già descritto da J. Priest and B. Wade¹: si lascia cadere un magnete permanente entro un tubo metallico verticale e si osserva che la velocità di caduta è inferiore a quella di caduta libera, mentre il tubo risulta soggetto ad una forza di trazione che si somma alla forza peso. Se le correnti di Foucault indotte nel tubo sono abbastanza intense la velocità di caduta del magnete si stabilizza ad un valore costante.

Una semplice modellizzazione del fenomeno è la seguente: il magnete di massa m è soggetto al suo peso mg e ad una forza frenante $F = -kv$, dove v è la sua velocità e k è una costante di proporzionalità che si può determinare sperimentalmente. Per la seconda legge di Newton:

$$mg - kv = m dv/dt \quad (3)$$

A regime l'accelerazione dv/dt è nulla e quindi la velocità limite vale $v_f = mg/k$.

L'equazione (3) si può riscrivere

$$k(v_f - v) = m dv/dt \quad (4)$$

Integrando questa equazione differenziale si trova che la velocità deve variare come:

$$v = v_f(1 - e^{-\frac{kt}{m}}) = v_f(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (5)$$

dove $\tau = m/k$ è la costante di tempo con cui la velocità va a regime.

Per il principio di azione e reazione, se il magnete interagendo col tubo risente di una forza F

diretta verso l'alto, il tubo risentirà di una forza uguale in modulo ma diretta verso il basso e quindi a regime il suo peso apparente P' non sarà più solo $P = M_{\text{tubo}} g$ ma aumenterà della quantità $F = k v_f = mg$, cioè sarà $P' = (M_{\text{tubo}} + m)g$.

Questo fatto si presta ad una verifica diretta quantitativa se si opera col tubo appeso ad un sensore di forza, come spiegato più avanti.

Nei successivi paragrafi sono presentate le misure della velocità limite di caduta di un magnete, ottenute con un sensore di distanza ad ultrasuoni e dell'andamento temporale della velocità di caduta del magnete dal suo avvio fino alla condizione di regime.

Apparato sperimentale

I magneti utilizzati per questo esperimento sono magneti anulari (più precisamente hanno forma di toro a sezione rettangolare) di Samario-Cobalto di diametro esterno 25 mm, diametro interno 8 mm, altezza 10 mm e massa 35.2 g.

Per aumentare l'effetto se ne può usare più di uno infilandoli, con le polarità uguali affacciate, in una vite di materiale non magnetico (ad esempio di plastica, nel nostro caso di massa 19 g) con un dado di arresto: dato che i magneti si respingono l'uno con l'altro essi si dispongono equispaziati su tutta la lunghezza della vite², la cui testa è forata per farvi passare un filo necessario a recuperare il magnete a fine caduta³.

Il tubo, di lunghezza circa un metro, deve avere un diametro interno appena superiore a quello del magnete: abbiamo lavorato con lo stesso magnete e due tubi, uno di ottone con diametro interno 33 mm ed uno di alluminio con diametro interno 31 mm, trovando un effetto frenante maggiore e quindi velocità limite minori (e perciò più facilmente misurabili) di circa un fattore sei col tubo più stretto.

Per misurare la forza che il magnete cadendo esercita sul tubo abbiamo appeso quest'ultimo (mediante un filo passante per due forellini diametralmente opposti praticati sul suo bordo superiore) ad un sensore di forza fissato ad un'asta bloccata sul bordo del tavolo di lavoro e collegato ad una interfaccia CBL Texas. Si fa la calibrazione a due punti del sensore: senza carico e con il peso del solo tubo (nel nostro caso 584 g pari a 5.72 N).

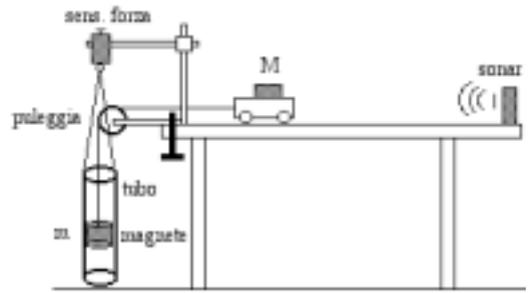


Figura 1: Schema dell'apparato sperimentale.

Il magnete (o meglio l'insieme di magneti montati sul supporto a vite di massa complessiva m) viene posizionato all'estremità superiore ed al centro del tubo tramite il filo di sospensione che passa su una carrucola di massa ed attrito trascurabili fissata al bordo del tavolo mediante una morsa. L'altra estremità del filo cui è sospeso il magnete è attaccata ad un carrello PASCO (massa $M_p = 510$ g) che porta una massa variabile M . Un sensore di distanza (sonar) collegato a CBL viene appoggiato all'estremità opposta del tavolo per misurare la posizione del carrello (figura 1).

Quando si lascia andare il filo il magnete scende nel tubo raggiungendo una velocità di regime, che dipende solo dal magnete, in un tempo τ che dipende invece sia dal magnete che dal valore della zavorra. Anche se il magnete viene lasciato cadere liberamente nel tubo (in questo caso la durata del transiente τ è molto piccola) esso impiega un tempo sorprendentemente lungo (alcuni secondi) a raggiungere la fine del tubo.

La presenza della zavorra ($M_p + M$), nell'ipotesi che l'attrito di carrello e puleggia siano trascurabili, non cambia le forze in gioco (la reazione vincolare del tavolo orizzontale bilancia la forza peso agente sulla zavorra) e quindi non modifica la velocità limite, ma cambia invece la massa inerziale del sistema magnete+carrello, e di conseguenza cambia la durata del transiente, e ciò consente di studiare agevolmente l'evoluzione temporale del fenomeno.

L'equazione (3) va modificata infatti in:

$$mg - kv = (m + M_p + M) dv/dt \quad (6),$$

e quindi rimane invariata la definizione $v_f = mg/k$ di velocità limite che dipende solo da k e da m (la massa dell'insieme di magneti su cui agisce il campo gravitazionale) mentre l'equazione (5) diventa:

$$v = v_f(1 - e^{-\frac{kt}{m+M_p+M}}) = v_f(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (7),$$

dove ora la costante di tempo

$$\tau = (m+M_p+M)/k \quad (8)$$

è proporzionale alla massa inerziale totale.

L'apparato descritto in figura 1 è una variante della tradizionale "macchina di Atwood orizzontale", frequentemente usata in didattica, perché consente di chiarire i diversi concetti di massa gravitazionale (in questo caso quella del magnete che, soggetta al campo gravitazionale terrestre produce la forza che fa muovere il sistema) e di massa inerziale (tutta la massa, magnete + carrello+ carico) che determina l'accelerazione del sistema secondo la legge di Newton.

Misure di velocità limite

Per valutare la costante di proporzionalità k fra la forza dovuta alle correnti indotte e la velocità di caduta abbiamo misurato la velocità limite con il sonar e pesato la massa del magnete appeso al filo. La frequenza di campionamento usata è 20 Hz.

Con una zavorra $M_p+M = 1975$ g e 5 magneti ($m = 195$ g) si vede che il transiente è molto bre-

ve e che il moto di caduta avviene sostanzialmente a velocità costante ($v_f = 0.14 \pm 0.01$ m/s), con la stessa zavorra e 1 solo magnete ($m = 54$ g) la velocità limite viene raggiunta dopo un transiente che dura qualche secondo.

La determinazione della velocità limite e del suo errore si fanno usando l'opzione STATS/INTEGRAL del programma Physics come mostra il successivo inserto grafico (figura 3).

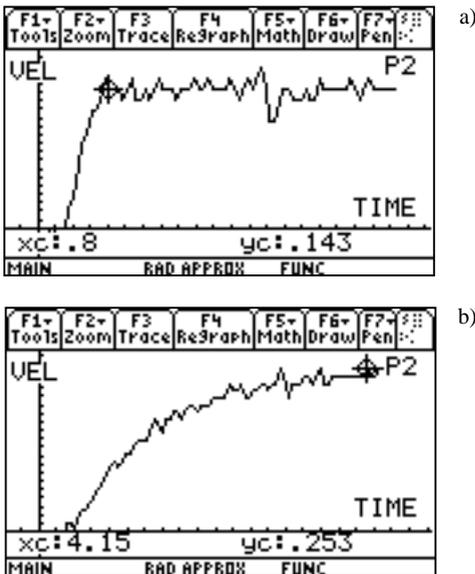


Figura 2: velocità in funzione del tempo. a) 5 magneti, b) 1 magnete, notare le diverse scale temporali dei due grafici (xc ed yc sono le coordinate del cursore a croce).

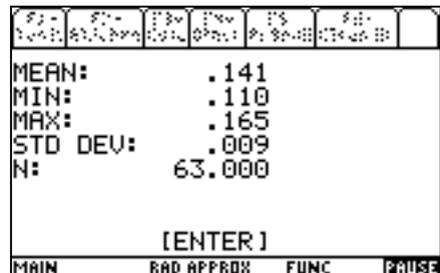
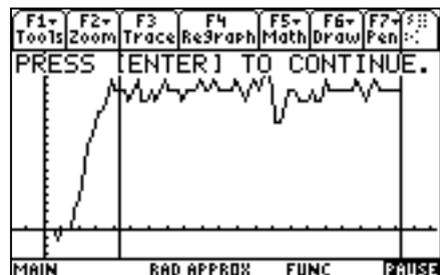
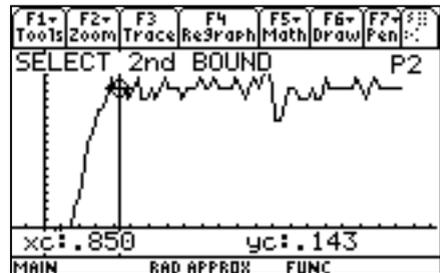


Figura 3: valutazione del valor medio di velocità e dell'incertezza.

I valori che si ottengono per $k = mg/v_f$ per le diverse configurazioni di 1,2,3,4,5 magneti sono riportati in figura 4:

F1 Tools	F2 Plot Setup	F3 Cell	F4 Header	F5 Calc	F6 Util	F7 Stat
DATA	m(kg)	vel(m...)	k(Ns/...			
	c1	c2	c3			
1	.054	.25	2.12			
2	.089	.2	4.37			
3	.124	.17	7.16			
4	.159	.155	10.1			
c3=c1*9.81/c2						
MAIN RAD APPROX FUNC						

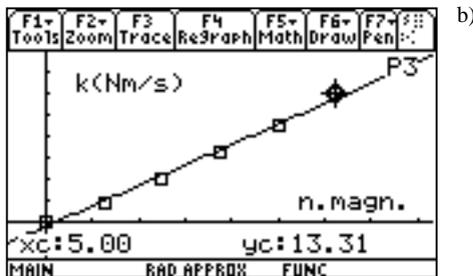


Figura 4: valori calcolati di k e grafico di k in funzione del numero di magneti.

Risulta quindi che k è approssimativamente proporzionale al numero di magneti impiegato.

Misure della forza esercitata dal magnete sul tubo

La forza registrata nell'esperimento descritto dal grafico di figura 2a (5 magneti e solo carrello) è riportata nel grafico di figura 5, mostrato due volte: in figura 5a il cursore è posizionato al tempo $t = 0.3$ s, quando il carrello è bloccato e il filo trattiene il magnete fermo all'imboccatura del tubo, e in figura 5b al tempo $t = 1.15$ s, quando il magnete ha raggiunto la velocità limite. La differenza di forza è pari a 1.91 N, corrispondente ad una extra-massa, pari a 195 g che appesantisce il tubo.

In figura 6 è riportato un grafico analogo per 1 magnete con zavorra $M_p + M = 1975$ g. Qui la differenza di forza tra quando il magnete è fermo e quando ha raggiunto la velocità limite è di 0.54 N, pari ad una extra-massa di 55 g.

In tutti i casi (entro l'incertezza di 1 grammo) il tubo risulta appesantito, quando la velocità ha raggiunto il valore limite, cioè quando l'accele-

razione è nulla, da una massa uguale a quella dei magneti impiegati, ovvero $P' = (M_{tubo} + m)g$.

L'andamento temporale dell'apparente aumento di peso ΔF che si produce quando si lascia cadere il magnete è esponenziale dato che $\Delta F = -kv$, e la velocità deve seguire la (7). Per determinare quantitativamente la costante di

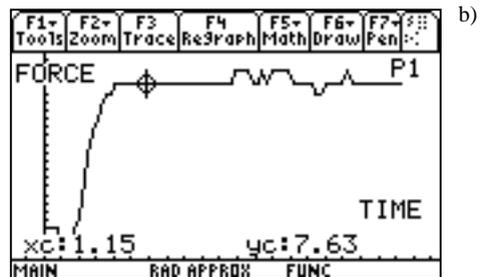
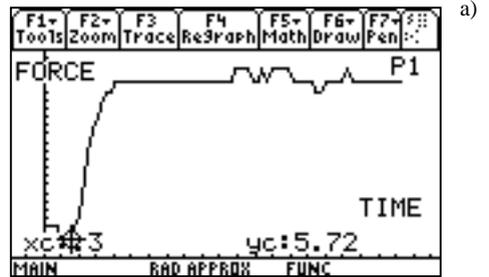


Figura 5: La forza in funzione del tempo, con il cursore posizionato a due tempi diversi.

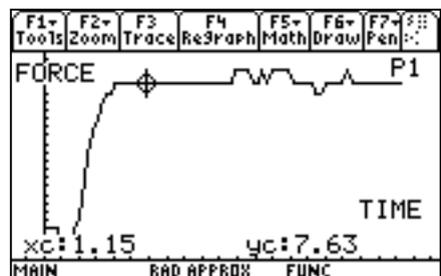
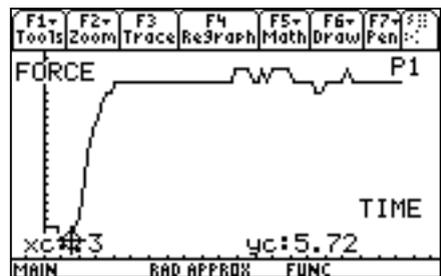


Figura 6: forza (N) in funzione del tempo (s) per 1 magnete e zavorra $M_p + M = 1975$ g.

tempo di queste curve esponenziali è preferibile usare le registrazioni della velocità di caduta del magnete perché il sensore di forza tende ad entrare in oscillazione soprattutto se si lavora con poca o addirittura senza zavorra.

Misure del transiente

Si può utilizzare il modello descritto nell'introduzione per ottenere una previsione della costante di tempo τ del transiente da confrontare con il valore sperimentale. Iniziamo con l'esempio presentato in figura 7, relativo all'esperimento effettuato con 1 magnete ($m = 54$ g) e massa totale $M+M_p = 2665$ g.

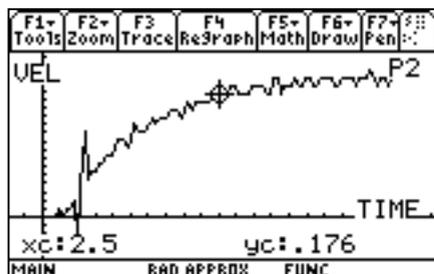


Figura 7: l'andamento della velocità che si vuole interpolare con l'equazione (7).

Qui, assumendo per k il valore calcolato precedentemente come $k = mg/v_f = 2.12$ Nm/s, il modello descritto dall'equazione (8) predice il valore $\tau = 2.719/2.12 = 1.28$ s.

Utilizzando il software PHYSICS per CBL è facile confrontare questa previsione con i dati sperimentali: basta definire (come mostrato in figura 8) la funzione usata nell'equazione (7)

$$v(t) = v_f \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right)$$

nell'ambiente "Y=" della calcolatrice grafica prima di lanciare il programma PHYSICS, e poi utilizzare il menu ADJ MODEL per aggiustare i tre i parametri $a = v_f$, $b = t_0$ e $c = \tau$ fino ad ottenere una curva che interpola bene i punti sperimentali.

Dato che all'inizio i tre valori dei parametri sono azzerati ($a = b = c = 0$), essi vanno ridefiniti tutti con ragionevoli valori che possono venire suggeriti dal grafico usando la funzione TRACE, che muove il cursore sui punti sperimentali mostrando le coordinate. Dato che in questo grafico la velocità limite è circa 0.23 m/s poniamo $a = 0.23$. Poi lasciando $b = 0$ proviamo il valore $\tau = c = 1$ s, ottenendo la curva di figura 9.

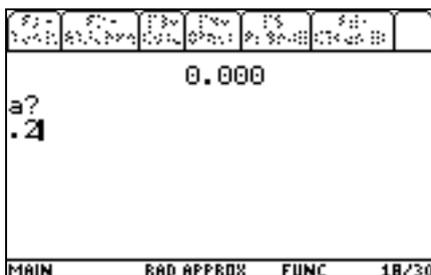
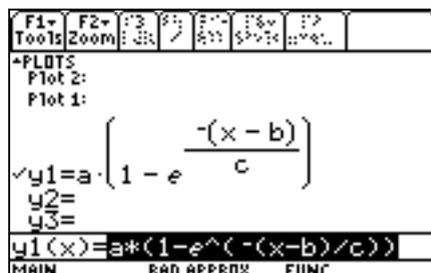


Figura 8: definizione della funzione interpolante e menu per modellizzazione.

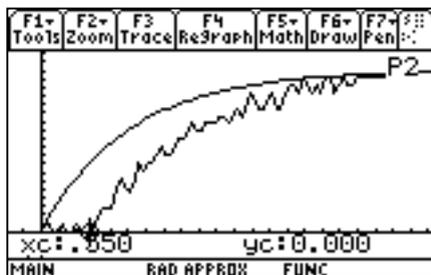


Figura 9: un primo tentativo di interpolazione.

Qui l'interpolazione non è buona perché non va bene il valore predefinito di $b = t_0 = 0$. Spostando il cursore si può notare che la velocità comincia a crescere per $t > 0.55$ s. Quindi poniamo $b = 0.55$.

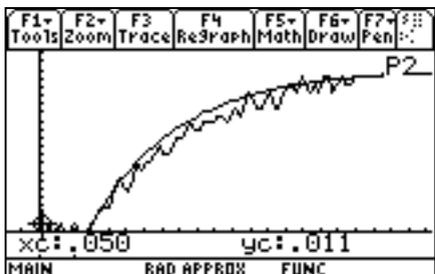
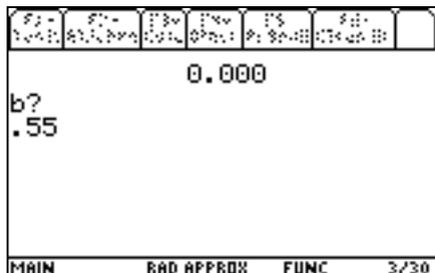


Figura 10: l'interpolazione dopo aver aggiustato il valore di $b = t_0$.

L'accordo tra dati sperimentali e curva interpolante migliora decisamente. Infine proviamo ad usare il valore previsto per t , cioè $c = 1.28$, e otteniamo

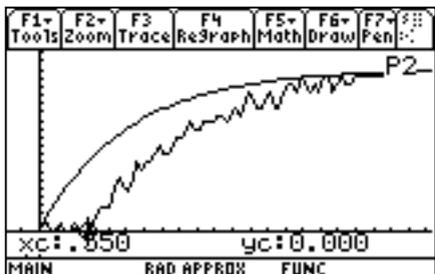
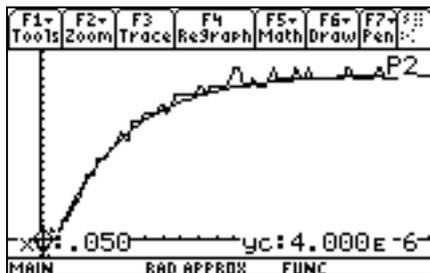
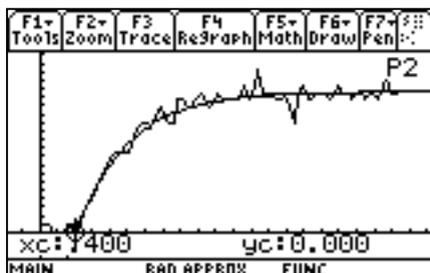


Figura 11: l'interpolazione finale.

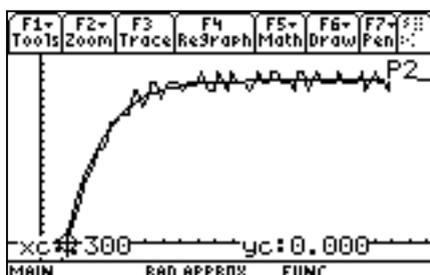
Valutando "a occhio" l'accordo tra dati sperimentali e curva interpolante (fissati i valori dei parametri a e b) per diversi valori di c , si può stabilire che il valore di τ è nell'intervallo (1.30 ± 0.04) s. Lo stesso procedimento⁴, applicato ai dati registrati aumentando progressivamente la zavorra posta sul carrello, fornisce le interpolazioni di figura 12.



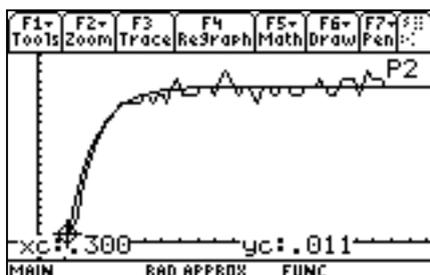
$\tau = 0.92 \pm 0.05$ s, $m + M_p + M = 2.029$ kg



$\tau = 0.60 \pm 0.04$ s, $m + M_p + M = 1.298$ kg



$\tau = 0.40 \pm 0.05$ s, $m + M_p + M = 0.940$ kg



$\tau = 0.27 \pm 0.03$ s, $m + M_p + M = 0.564$ kg

Figura 12: determinazione della costante di tempo t per diversi valori della massa totale.

I risultati possono essere riassunti nel grafico di figura 13, ove sono riportati i valori stimati di τ in funzione dei valori della massa totale.

F1 Tools	F2 Plot Setup	F3 Cell Header	F4 Header	F5 Calc	F6 Util	F7 Stat
DATA	τ (s)	M (kg)				
	c1	c2		c3		
1	1.3	2.719				
2	.92	2.029				
3	.6	1.298				
4	.4	.94				
c3=						
MAIN RAD APPROX FUNC						

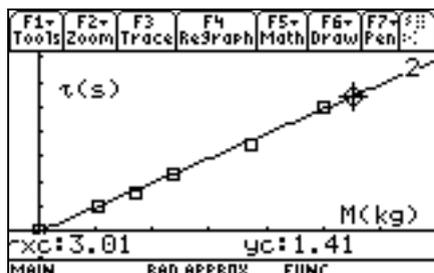


Figura 13: dipendenza della costante di tempo τ dalla massa inerziale $m+M_p+M$.

La pendenza della curva ($1/k$), che si è imposto passi per l'origine, dà una nuova stima di $k = (2.12 \pm 0.05) \text{ Nm/s}$, in accordo con il valore ricavato nel paragrafo precedente dalle misure di massa e di velocità limite.

Considerazioni finali

Le potenzialità didattiche dell'esperimento descritto in questo articolo sono molteplici.

Innanzitutto si tratta di una configurazione sperimentale semplice con la quale è possibile studiare l'effetto dovuto a forze di natura elettromagnetica, raramente oggetto di indagine sperimentale nei laboratori didattici, a partire da un fenomeno (la caduta lenta del magnete nel tubo) che appare insolito e può quindi stimolare la curiosità degli studenti.

La natura della forza studiata permette di introdurre il concetto di velocità limite, concetto fondamentale in tutti i casi in cui la forza che si oppone al moto dipende dalla velocità, consentendo quindi collegamenti con altri fenomeni analoghi, quale, ad esempio, il moto di un corpo in un fluido viscoso.

Più in generale le caratteristiche del dispositivo sperimentale usato (macchina di Atwood orizzontale) permettono di sottolineare la differenza concettuale fra massa gravitazionale (da cui dipende la forza che genera il moto) e massa inerziale (da cui dipende l'accelerazione del sistema), mentre la possibilità di misurare direttamente la forza agente sul tubo consente di sottolineare la presenza di una coppia di forze uguali ed opposte legate all'interazione fra il tubo ed il magnete.

La realizzazione dell'esperimento mediante un sistema di acquisizione in tempo reale, oltre a permettere una visualizzazione immediata dell'andamento nel tempo delle variabili significative, offre la possibilità di individuare agevolmente per tentativi la curva che meglio rappresenta l'andamento dei dati sperimentali durante il periodo di transizione dal moto accelerato a quello a velocità costante e di controllare quindi l'attendibilità della schematizzazione utilizzata per interpretare il fenomeno.

Infine il dispositivo sperimentale utilizzato consente di realizzare un moto "rigorosamente" uniforme e può quindi essere utilizzato come dispositivo di base per lo studio di altri fenomeni nei quali sia necessario far muovere un corpo a velocità costante.

Bibliografia e note

¹ J. PRIEST, B.WADE: "Un esperimento sulla legge di Lenz", *LFnS*, XXVII, 2, 70 (1994).

² Il campo magnetico alle superfici superiore ed inferiore del toro è di ben $\pm 0.35 \text{ T}$ e si annulla al centro della superficie laterale. Con una fila di 8 magneti si misura un campo massimo di 0.45 T sulla superficie laterale della fila in corrispondenza degli spazi vuoti fra un magnete e l'altro.

³ L'insieme di magneti, vite e tubo possono essere richiesti alla ditta M.A.D (grolive@tin.it).

⁴ La procedura qui utilizzata è assai più rapida rispetto al modo consueto di interpolazione di un esponenziale attraverso il metodo della linearizzazione passando ai logaritmi: dato che tra i parametri incogniti v_i è v_f , per ricavare $1/\tau$ come pendenza del grafico di $\log[(v_f - v)/v_i]$ in funzione del tempo, si devono ricalcolare le ordinate per ogni valore successivamente assunto per v_f .