

IRRSAE VENETO
Corso di Aggiornamento

Le rivoluzioni scientifiche (1600-1750)
nuovi saperi e nuovi linguaggi

**“La clessidra ad acqua di Galileo,
ovvero un precursore dei moderni trasduttori”**

contributo di

Giacomo Torzo

29-30 settembre 1999
Mestre- Auditorium Liceo “Ugo Morin”

La clessidra ad acqua di Galileo ovvero un precursore dei moderni trasduttori

Lo strumento costruito da Galileo per misurare con precisione gli intervalli di tempo nel famoso esperimento sul piano inclinato può essere visto come un primo esempio di **trasduttore** di grandezze fisiche.

Nella moderna tecnologia il trasduttore trasforma una grandezza fisica in un segnale elettrico, di solito una tensione.

Nella clessidra di Galileo, come vedremo poi in dettaglio, il dispositivo trasduttore provvedeva a trasformare la grandezza “tempo” in grandezza “peso” (della quantità d’acqua uscita da un vaso nell’intervallo di tempo considerato, nella clessidra gravimetrica).

Si trattava quindi di un trasduttore meccanico. Ma di trasduttori meccanici è piena la storia della tecnologia : solo nel secolo scorso infatti i trasduttori elettronici hanno cominciato a soppiantare quelli meccanici diventando, con l’avvento del personal computer, i soli praticamente in uso.

Si può dire che ogni moderno **strumento di misura** è in sostanza costituito da un trasduttore, una interfaccia ed un calcolatore.

L’esperimento di Galileo avveniva in un’epoca in cui il concetto stesso di “misura” era in via di definizione, e solo un osservatore moderno può apprezzare appieno il valore di quell’esperimento che dava un esempio di progettazione di misura e contemporaneamente di tecnologia adatta a realizzarla.

Vedremo come Galileo, pur senza formalizzare il procedimento, affrontò i problemi che oggi incontriamo nella progettazione di un moderno trasduttore, ed in particolare il **conflitto tra linearità, portata e sensibilità**.

La misura

La misura di una grandezza fisica consiste nel confrontare la grandezza in esame con una opportuna “unità di misura” precedentemente scelta.

Ciò può essere fatto in modo **diretto**, o in modo **indiretto**.

Ad esempio se voglio misurare la *lunghezza* di un oggetto posso *direttamente* confrontarlo con un oggetto campione “unità di lunghezza”

Se voglio misurare il *peso* di un corpo posso misurare *l'allungamento* prodotto in una molla cui appendo il corpo in questione e confrontare tale allungamento con quelli prodotti da una serie di masse campione (misura *indiretta* con strumento tarato).

Se voglio misurare un **intervallo di tempo** in modo indiretto dovrò quindi scegliere un fenomeno in cui una **qualche grandezza vari nel tempo in modo prevedibile** e confrontare l'intervallo di tempo di mio interesse con i valori di tale grandezza.

Qui analizzeremo in qualche dettaglio il trasduttore utilizzato da Galileo (**cronometro ad acqua**) per misurare relazioni tra spazi e tempi nel famoso esperimento del **piano inclinato**.

Va detto che ai tempi di Galileo il concetto di misura, oggi dato per scontato nella comunità scientifica, era ancora in via di definizione. Galileo infatti misurava sostanzialmente **rapporti di grandezze**, (rapporti di tempi impiegati corrispondenti a rapporti di spazi percorsi...).

La descrizione di Galileo dell'esperimento del piano inclinato¹

“In un **regolo**, o voglian dir corrente, di legno, lungo circa 12 braccia, e largo per un verso mezo braccio e per l'altro tre dita, si era in questa minor larghezza incavato un **caneletto**, poco più largo d'un dito;

tiratolo dritissimo, e, per averlo ben pulito e liscio, incollatovi dentro una carta pecora zannata e lustrata al possibile, se faceva in esso scendere una **palla di bronzo** durissimo, ben rotondata e pulita;

Costituito che si era il detto **regolo pendente**, elevando sopra il piano orizzontale una delle sue estremità un braccio o due ad arbitrio, si lasciava (come dico) scendere per il detto canale la palla, notando, nel modo che appresso dirò, il tempo che consumava nello scorrerlo tutto, replicando il medesimo atto molte volte per assicurarsi bene della quantità del tempo, nel quale non si trovava mai differenza nè anco della decima parte d'una battuta di polso. x

Fatta e stabilita precisamente tale operazione, facemmo scender la medesima palla solamente per la quarta parte della lunghezza di esso canale e **misurato il tempo della sua scesa**, si trovava sempre puntualissimamente esser la metà dell'altro: e facendo poi l'esperienze di altre parti, esaminando ora il tempo di tutta la lunghezza col tempo della metà, o con quello delli duo terzi o de i tre quarti, o in conclusione con qualunque altra divisione, per esperienze ben cento volte replicate sempre s'incontrava gli **spazii passati esser tra di loro come i quadrati e i tempi**, e questo in tutte le inclinazioni del piano, cioè del canale nel quale si faceva scender la palla;

Dove osservammo ancora, **i tempi delle scese per diverse inclinazioni** mantener esquisitamente tra di loro quella proporzione che più a basso troveremo essergli assegnata e dimostrata dall'Autore

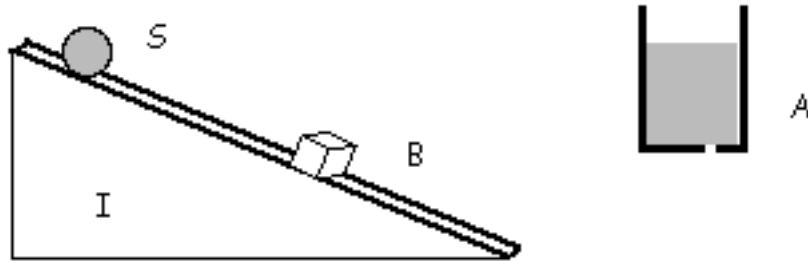
Quanto poi alla **misura del tempo** si teneva una **gran secchia piena d'acqua**, attaccata in alto, la quale per un sottil cannellino, saldatogli nel fondo, versava un sottil filo d'acqua, che s'andava ricevendo con un piccol bicchiere per tutto 'l tempo che la palla scendeva nel canale e nelle sue parti: le particelle poi dell'acqua, in tal guisa raccolte, s'andavano di volta in volta **con esatissima bilancia pesando**, dandoci le differenze e proporzioni de i pesi loro, le differenze e proporzioni de i tempi; e questo con tal giustezza, che, come ho detto, tali operazioni, molte volte replicate, già mai non differivano d'un notabil momento.”

¹ Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e ai movimenti locali.(1638)

**La versione dell'apparato galileiano
ricostruita presso il Dipartimento di Fisica
dell'Università di Padova**



Una schematizzazione dell'esperimento



L'apparato sperimentale di Galileo descritto nei [Discorsi \(Terza giornata\)](#) può essere sostanzialmente riassunto come:

- un [piano inclinato](#) (I) su cui si fa rotolare la [sfera](#) (S).
- una [barriera d'arresto](#) (B) che può esser fissata in posizione variabile sul piano .
- un [secchio d'acqua](#) (A), inizialmente pieno e con un [foro](#) sul fondo che può essere chiuso con un dito dall'operatore .

Le modalità operative dell'esperimento erano le seguenti:

- L'operatore posa la sfera sul piano, mentre tiene chiuso il foro .
- All'istante iniziale della misura, lascia andare la sfera, e apre il foro lasciando libera l'acqua di defluire dal secchio.
- Resta poi in attesa, fino a quando la sfera colpisce la barriera emettendo un segnale acustico caratteristico.
- Nell'istante in cui percepisce il segnale acustico, chiude il foro.
- Misura la quantità di acqua uscita dal secchio

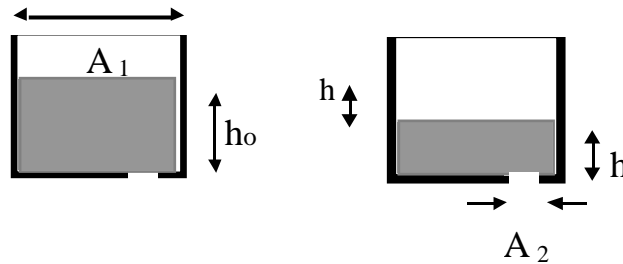
Se si assume che la velocità di deflusso dell'acqua a foro aperto sia costante, allora la [quantità di acqua defluita misura il tempo trascorso \$t\$](#) , e l'esperimento permette di studiare come varia il tempo di caduta t in funzione degli altri parametri (inclinazione del piano e spazio percorso dalla sfera).

Il secchio forato venne dunque usato come una [clessidra ad acqua](#).

Galileo ci spiega nei *Discorsi* che la quantità d'acqua defluita veniva da lui raccolta in un bicchiere e pesata ("con esatissima bilancia") ma qui ci piace fare un piccolo volo di fantasia e [ipotizzare che nei primi tentativi](#) Galileo avesse anche provato ad usare la sua clessidra [misurando le variazioni di livello](#) del liquido.

La clessidra a livello

Consideriamo un recipiente cilindrico di sezione costante A_1 con un foro sul fondo di sezione A_2 .



Siano h_0 e h i livelli del liquido, rispettivamente all'inizio e dopo un tempo t .

La diminuzione di volume dV per un abbassamento dh del livello è $dV = A_1 dh$

Il volume uscito nel tempo dt può essere scritto anche $dV = v A_2 dt = A_2 \sqrt{2gh} dt$ ove $v = \sqrt{2gh}$ è la velocità di deflusso.

Uguagliando i due volumi si trova la relazione fra dh e dt :

$$dh = \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2gh} dt = S(h) dt, \quad \text{ove: } S(h) = \frac{dh}{dt} = \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2gh}$$

$dh=f(h,dt)$ è l'equazione caratteristica della clessidra, e $S(h)$ è la sensibilità.

La clessidra è come un orologio nel quale l'indicatore a quadrante è sostituito dal livello del liquido.

Il valore h ha il significato di valore-indice Y di qualsiasi strumento dotato di indicatore visivo continuo. L'altro valore è il valore t della grandezza fisica misurata (X nel caso di uno strumento generico).

Il significato della sensibilità $S=dY/dX$ è quello di un rapporto fra risposta e stimolo, ed è una grandezza che, in generale, dipende dal valore misurato.

Solo se pensiamo di poter considerare S costante (ad esempio per piccoli valori del dislivello misurato) l'equazione della clessidra si semplifica in:

$$Y = SX$$

che è l'equazione caratteristica di uno strumento lineare.

Strumenti lineari e non lineari.

L'assunzione di linearità negli strumenti di misura è spesso data per scontata, mentre strumenti rigorosamente lineari non esistono.

Tuttavia se teniamo conto del fatto che tutte le misure sono affette da errore, possiamo ridurre il campo di misura fino a rendere l'errore di linearità inferiore all'errore di misura, e quindi trascurabile.

Nel caso della clessidra ad acqua possiamo scrivere $S(h)$ come

$$S(h) = \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2g(h_0 - h)} = \sqrt{1 - \frac{h}{h_0}} \quad = \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2gh_0}$$

La variazione S della sensibilità nell'intervallo h è allora

$$S = (1 - \sqrt{1 - h/h_0}) - \frac{h}{2h_0} \quad \text{se } h \ll h_0$$

Cioè quando il livello finale non è troppo diverso da quello iniziale, la variazione relativa di S è:

$$\frac{S}{S(h_0)} = -\frac{h}{2h_0}$$

Ad esempio per dislivelli contenuti entro il 10% di h_0 ($h/h_0 < 0.1$) la variazione relativa di sensibilità è contenuta entro il 5%.

Gli errori di misura nella clessidra a livello.

Nella clessidra a livello ci sono almeno tre importanti cause di errore:

- a) **Non-cilindricità del vaso.** Per avere una buona sensibilità occorre lavorare con recipienti di piccola sezione e grande altezza.

All'epoca di Galileo, l'unico modo di lavorare il vetro era la soffiatura, e con questa tecnica è impossibile ottenere cilindri a sezione A_1 costante.

- b) **Capillarità.** La grandezza h =livello è definita a meno del menisco che si forma al contatto acqua-recipiente: è difficile definire un livello con precisione migliore di qualche decimo di millimetro. Questo problema sarà tanto maggiore quanto minore è il diametro del vaso.

- c) **Non-linearità**

Assumendo un valore di $1/2$ mm per l'errore di lettura di h , per dislivelli $h \approx 1$ cm si ha una incertezza del 5%. L'errore di non linearità diventa trascurabile (0.5%) per $h_0 > 100$ $h=1$ m.

In queste condizioni possiamo parlare di strumento **lineare entro gli errori di misura.**

Tuttavia si giunge a questo risultato **limitando severamente la portata** dello strumento ($h < 1$ cm) e utilizzando un vaso molto alto (1m).

La **precisione** relativa nella misura degli intervalli di tempo dt è proporzionale alla **sensibilità**, ovvero al rapporto A_2/A_1 .

Per crescere la precisione dobbiamo o ridurre la sezione del cilindro o aumentare quella del foro di uscita dell'acqua: in entrambi i casi avremo uno strumento di portata limitata, se vogliamo anche che esso resti "lineare".

La conclusione è che siamo di fronte a un **conflitto irriducibile fra linearità da un lato e precisione e portata dall'altro.** Questo significa in definitiva che la clessidra a livello, come strumento di precisione, non vale un gran che.

Galileo probabilmente se ne accorse subito, e trovò il rimedio.

Dalla clessidra a livello alla clessidra gravimetrica

La clessidra ad acqua sfrutta, per misurare il tempo, l'idea che il moto dell'acqua avvenga a velocità costante. Ciò è vero solo in prima approssimazione: la resistenza al flusso opposta dalla viscosità si può considerare infatti costante (dopo un breve transiente), ma la forza agente sulla massa d'acqua che si affaccia al foro di uscita dipende dal livello del liquido sovrastante (legge di Stevino).

Di conseguenza uguali volumi di acqua usciti dal foro (corrispondenti a uguali dislivelli) corrispondono a intervalli di tempo diversi a seconda che il vaso sia più o meno pieno (cioè a seconda del valore di h_0).

E questo problema diventa tanto più evidente quanto più si aumenta la sensibilità dello strumento: il dislivello per unità di tempo cresce, ma cresce anche la differenza tra i valori misurati per lo stesso intervallo di tempo.

Per ottenere uno strumento lineare bisogna mantenere all'incirca costante l'altezza della colonna d'acqua sopra il foro. Ciò si può fare o limitando la misura a brevi intervalli di tempo (piccola portata), o usando un vaso largo e un foro piccolo (piccola sensibilità).

Esiste un modo diverso per misurare accuratamente il volume dell'acqua spillata senza dover ricorrere a grandi variazioni di livello ?

Galileo si accorse che il problema poteva essere risolto (utilizzando un vaso largo o un foro piccolo) misurando il volume, anziché attraverso la variazione di livello, attraverso il peso della massa di acqua uscita. Egli raccolse cioè l'acqua uscita dal secchio in un secondo recipiente per poi pesarla. (clessidra gravimetrica)

Già ai tempi di Galileo si potevano fare pesate di grande precisione con mezzi semplici. Con precisioni del mezzo grammo, pesando 100 cc. di acqua si raggiunge una incertezza dello 0.5%.

Se ad esempio si usa un cilindro di 30 cm di diametro riempito all'altezza $h_0=35$ cm si ottiene che spillando 100 grammi di acqua la variazione di livello è solo $h=V/\pi r^2=1.4$ mm e $\Delta h/h_0=0.2\%$

L'errore di linearità risulta allora minore dell'incertezza della misura.

Struttura generale degli strumenti di misura

La clessidra di Galileo può servire per introdurre una **definizione generale della struttura di uno strumento di misura**.



La **clessidra a livello** è uno strumento che opera la trasduzione **tempo-volume-livello**,

Qui il **sensore** è Galileo stesso (che opera da interruttore del flusso di acqua) la cui accuratezza dipende dal tempo di risposta del sistema orecchio-cervello-mano. **L'interfaccia** tra sensore e indicatore è il vaso forato con l'acqua, e l'**indicatore** la superficie libera dell'acqua che scorre sulla scala graduata.

La struttura della **clessidra gravimetrica** è sostanzialmente la stessa: la diversità principale consiste nel fatto che interfaccia (= vaso forato + vaso di raccolta + bilancia) e visore (= contrappesi e ago della bilancia) operano ora una trasduzione **tempo-volume-massa**.

Questo schema è del tutto generale: può cioè considerarsi paradigmatico di tutta la strumentazione moderna: **ogni strumento di misura può essere considerato come composto di un sensore, una interfaccia ed un indicatore**.

Strumento Classico

Sensore + Interfaccia + Indicatore

Alcuni esempi

Nell'**oscilloscopio**

- il **pennello elettronico** che attraversa le armature di un condensatore costituisce il **sensore**,
- l'**elettronica per generare il campo elettrico periodico** per la deflessione orizzontale del pennello è l'**interfaccia**,
- lo **schermo fluorescente graduato** è l'**indicatore**,

Nello **strumento a bobina mobile**

- la **bobina** piatta rotante attorno all'asse è il **sensore**,
- il **magnete permanente e la molla di richiamo** costituiscono l'**interfaccia**,
- la **lancetta** su scala graduata è l'**indicatore**.

Nel **termometro a mercurio**

- Il **bulbo** pieno di mercurio è il **sensore**
- Il **capillare** è l'**interfaccia**
- La **scala** graduata su cui scorre il menisco è l'**indicatore**

Questa struttura generale ci permette di intuire perchè l'elettronica ha potuto avere un impatto enorme nel mondo della strumentazione:

- da un lato lo sviluppo tecnologico ha messo a disposizione una miriade di **sensori** che trasformano qualsiasi grandezza fisica in **segnale elettrico**
- dall'altro la straordinaria evoluzione della **elettronica analogica** e dei **calcolatori digitali** ha reso assolutamente più **economico** ed **efficiente** il processo di manipolazione di **segnali elettrici** rispetto a qualsiasi altro tipo di segnale.

Lo Strumento Universale

Sensore + Interfaccia + Microprocessore

Vediamo qualche esempio concreto di questa evoluzione:

la **bilancia**, che utilizzava un dispositivo meccanico per confrontare la massa di un oggetto con quella di masse note, è oggi ovunque sostituita da un **sensore di forza** calibrato, da un circuito per la manipolazione del segnale da esso prodotto, e da un visore numerico che mostra il valore del segnale elaborato .

Il **termometro a mercurio** che sfruttava l'espansione del fluido per spostare il menisco in un capillare graduato è ormai soppiantato da un **termistore** il cui segnale, elaborato da un microprocessore viene mostrato su un display a cristalli liquidi.

Il **tachimetro** meccanico nelle vecchie automobili era costituito da un disco magnetizzato rotante, mosso da un cavo metallico collegato meccanicamente alle ruote, e affacciato ad un disco metallico mantenuto in posizione di riposo da una molla: le forze prodotte dalle correnti indotte nel disco metallico dal campo magnetico rotante lo fanno ruotare fino a che la forza elastica di richiamo produce una situazione di equilibrio, così che l'angolo di rotazione misura la velocità.

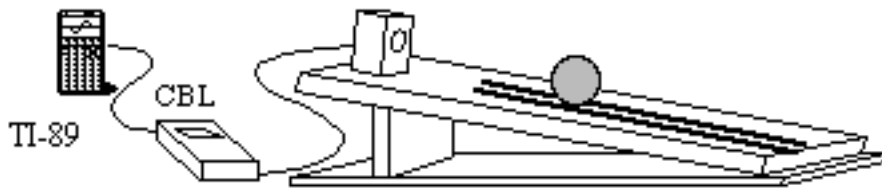
I moderni tachimetri usano invece un **sensore di posizione** che dà un segnale elettrico ad ogni giro della ruota della vettura: la frequenza degli impulsi viene tradotta da un circuito in un segnale che viene letto su un indicatore digitale.

Il **manometro** meccanico traduce la differenza di pressione tra l'interno e l'esterno di un tubo metallico curvo in uno spostamento della estremità chiusa del tubo (Bourdon Gauge): tale spostamento viene amplificato da un equipaggio meccanico che muove una lancetta davanti ad una scala graduata e ne permette la calibrazione in unità di pressione. Il manometro elettronico usa un **sensore di forza** (di solito piezoelettrico) che produce un segnale correlato allo sforzo applicato ad una membrana che separa i due ambienti a diversa pressione, un circuito per l'elaborazione di tale segnale ed un visore per la lettura del valore in uscita.

La struttura comune a tutti i moderni strumenti di misura è dunque:

sensore - interfaccia - microprocessore

L'esperimento del piano inclinato come lo farebbe oggi Galileo



Il sistema di acquisizione:

Sensore di distanza (sonar) + interfaccia (CBL) + calcolatore (o calcolatrice grafica tascabile).

L'apparato:

Piano inclinato (asse rigida) e corpo che “cade” (sfera che rotola)

Certamente questo tipo di apparato non ha il fascino della semplicità dell'apparato originale di Galileo, che consentiva uno studio basato sulla correlazione tra spazio e tempo in modo diretto e familiare (spazi misurati con il metro e tempi misurati dal flusso dell'acqua).

Di contro il moderno **strumento universale** (che forse un po' nasconde le grandezze fisiche investigate dentro delle “scatole nere” fatte di transistor e circuiti integrati) offre oggi a tutti la possibilità di compiere una raffinata (e allo stesso tempo facile) indagine dei fenomeni naturali, lasciando ampio spazio al gioco della scoperta della struttura del mondo fisico.

Se confrontiamo poi le conoscenze che erano patrimonio comune per l'uomo del 600 con quelle dell'uomo moderno scopriamo che l'uso di queste nuove tecnologie è forse meno distante dall'esperienza quotidiana di oggi di quanto lo era il piano inclinato e la clessidra gravimetrica per il contemporaneo di Galileo.

I progressi della tecnologia, cui Galileo ha dato inizio, consentono oggi anche agli studenti di scuola secondaria di affrontare lo studio delle scienze sperimentali in modo meno astratto e più legato all'obiettivo che tale studio secondo me dovrebbe avere: **comprendere la realtà per viverci meglio.**

Lo **strumento universale**, che racchiude in sé tutti i progressi compiuti in quattro secoli dall'esperimento di Galileo con la sua clessidra, consente oggi allo studioso di **concentrarsi sul fenomeno anziché sull'apparato, di investire più nella analisi che nella esecuzione degli esperimenti, di estrarre più facilmente e rapidamente le informazioni interessanti dalle misure raccolte...conservando anche un po' di tempo per poter gustare gli aspetti affascinanti della Storia della Scienza.**

Percorsi di indagine possibili

L'esperimento storico:

Il modello semplice : $S_1/S_2 = (t_1/t_2)^2$.

Estensioni dell'esperimento Galileiano del piano inclinato,
oggi facilmente accessibili anche a livello di scuola secondaria
con l'uso dello strumento universale:

Dipendenza dall'angolo di inclinazione

Il modello che tien conto della rotazione (momento di inerzia della sfera)

Il modello che tien conto dell'attrito (moto in Salita-Discesa).

Il modello che tien conto del raggio giratore (caso di sfera su rotaia)