

# Come valorizzare un antico esperimento didattico con la tecnica MBL : la macchina di Atwood per condurre una ricerca sperimentale sul moto

Barbara Pecori, *Dipartimento di Fisica, Università di Bologna*

Giacomo Torzo e Andrea Sconza, *Dipartimento di Fisica, Università di Padova*

## Introduzione

La macchina di Atwood fu progettata nel 1784 dal Reverendo George Atwood allo scopo di condurre esperimenti di cinematica e dinamica con i quali illustrare le proprie lezioni di fisica. La caratteristica principale che ha reso famosa la macchina è la possibilità che essa offre di studiare il moto di un corpo al quale sia applicata una forza costante senza che siano raggiunte velocità troppo elevate, alle quali l'attrito dell'aria diventa non trascurabile, o debbano essere considerati intervalli di tempo così piccoli da essere difficilmente misurati (Greenslade, 1985).

Negli attuali libri di testo, invece, la macchina di Atwood, trasformata in un sistema estremamente semplificato e poco realistico, ha perso molte delle potenzialità didattiche per le quali era stata progettata.

L'idea guida del nostro lavoro è stata quella di esplorare le possibilità offerte dalle tecnologie di interfacciamento col calcolatore per sfruttare al meglio le caratteristiche dell'apparato originale, rendendolo al tempo stesso più flessibile e più ricco dal punto di vista didattico.

Lo scopo di questo lavoro è quello di mostrare alcuni esempi delle possibilità offerte dalla macchina affinché altri ricercatori e insegnanti siano anch'essi invogliati a "giocare" con questo strumento e a sfruttarne le potenzialità.

## 1. Il modello fisico della macchina di Atwood

Il modello più semplice della macchina di Atwood (figura 1) è costituito da due masse appese alle estremità di un filo inestensibile e di massa trascurabile che passa sopra una puleggia di raggio  $R$  libera di ruotare attorno al suo asse orizzontale con attrito trascurabile.

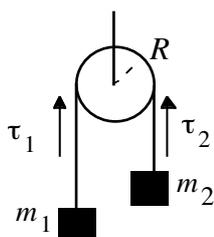


Figura 1

Usando un sistema di riferimento unidimensionale con asse verticale diretto verso il basso, e applicando la seconda legge di Newton ad entrambi i corpi si ha:

$$m_1 g - \tau_1 = m_1 a_1 \quad \text{e} \quad m_2 g - \tau_2 = m_2 a_2 \quad (1)$$

Se la puleggia ha momento di inerzia trascurabile e l'attrito non incide in modo rilevante, allora la tensione ai due capi del filo è la stessa ( $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ ), e per un filo inestensibile si ha:

$$a_2 = -a_1.$$

In queste ipotesi l'accelerazione  $a$  della massa  $m_2$  è:

$$a = (m_2 - m_1)g / (m_1 + m_2) \quad (2)$$

Nel caso in cui l'inerzia della puleggia non sia trascurabile ( $\tau_1 \neq \tau_2$ ), possiamo calcolare l'accelerazione uguagliando il momento della forza agente sul sistema (masse + puleggia)  $T = (m_2 - m_1)gR$  alla derivata del momento angolare totale rispetto al tempo  $dL/dt$ .

Il modulo del momento angolare della puleggia vale  $L_p = I\omega = I v / R$  (ove  $v = \omega R$  è la velocità tangenziale<sup>1</sup>,  $I$  è il momento di inerzia e  $R$  il raggio della puleggia), quello delle due masse vale

<sup>1</sup> In assenza di scivolamento del filo la velocità tangenziale della puleggia che è pari alla velocità lineare dei due corpi.

rispettivamente  $L_1=m_1vR$  e  $L_2=m_2vR$  e quindi il momento angolare totale è  $L=L_p+L_1+L_2=(I/R^2+m_1+m_2)vR$ .

Se si definisce la quantità  $M = I/R^2$  come massa inerziale effettiva della puleggia<sup>2</sup>, si ha  $T=(m_2-m_1)gR = dL/dt = (M+m_1+m_2)Rdv/dt$ , da cui :

$$a=(m_2-m_1)g/(M+m_1+m_2). \quad (3)$$

Questo è essenzialmente il modello utilizzato nella macchina originale di Atwood, in cui l'attrito era considerato trascurabile.

Se si vuol tener conto delle forze dissipative, si può introdurre un momento resistente  $T_f = R F_a$  (che descrive l'effetto dell'attrito del perno della puleggia e l'attrito viscoso delle masse in moto) se con  $F_a$  indichiamo una forza d'attrito *efficace* applicata a distanza  $R$  dall'asse. In tal caso l'accelerazione delle due masse può essere espressa come

$$a' = a - F_a/(M+m_1+m_2) = [(m_2-m_1)g - F_a]/(M+m_1+m_2). \quad (4)$$

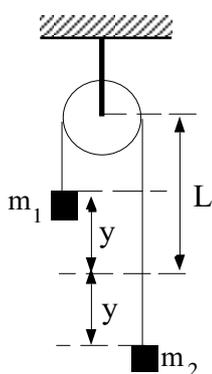


Figura 2

Se infine non è trascurabile neppure la massa del filo se ne può tener conto calcolando l'accelerazione come:

$$a = \frac{(m_2 - m_1 + 2\lambda y)g - F_a}{(2L + \pi R)\lambda + m_1 + m_2 + M} \quad (5)$$

ove  $\lambda$  è la densità lineare del filo e le lunghezze  $y$ ,  $L$  sono indicate in figura 2. ( $2L + \pi R$  è la lunghezza del filo e  $y$  è la distanza di ciascuna massa dalla posizione di equilibrio).

## 2. Caratteristiche dell'apparato sperimentale

Nell'apparato originale di Atwood si usava un particolare dispositivo per misurare la velocità del corpo in caduta quando questo aveva percorso una distanza prefissata sotto l'azione di una forza costante. Lungo la scala graduata, utilizzata per misurare le distanze, veniva posta una forcina attraverso la quale veniva fatto passare il corpo. Questo era costituito di due parti delle quali quella superiore, di massa esattamente uguale alla differenza fra le masse dei due corpi, veniva trattenuta dalla forcina. Da quel momento in avanti il sistema era in equilibrio e il moto procedeva ad una velocità costante, uguale alla velocità istantanea del corpo nell'istante in cui la massa in eccedenza era stata trattenuta dalla forcina. La velocità veniva poi misurata facendo percorrere al corpo una distanza tale da corrispondere ad un numero intero di secondi, misurati da un pendolo che batteva il secondo.

<sup>2</sup> Se la puleggia può essere approssimata da un disco omogeneo di massa  $m_p$ , il momento di inerzia vale  $I=m_p R^2/2$ , e quindi  $M=m_p/2$ .

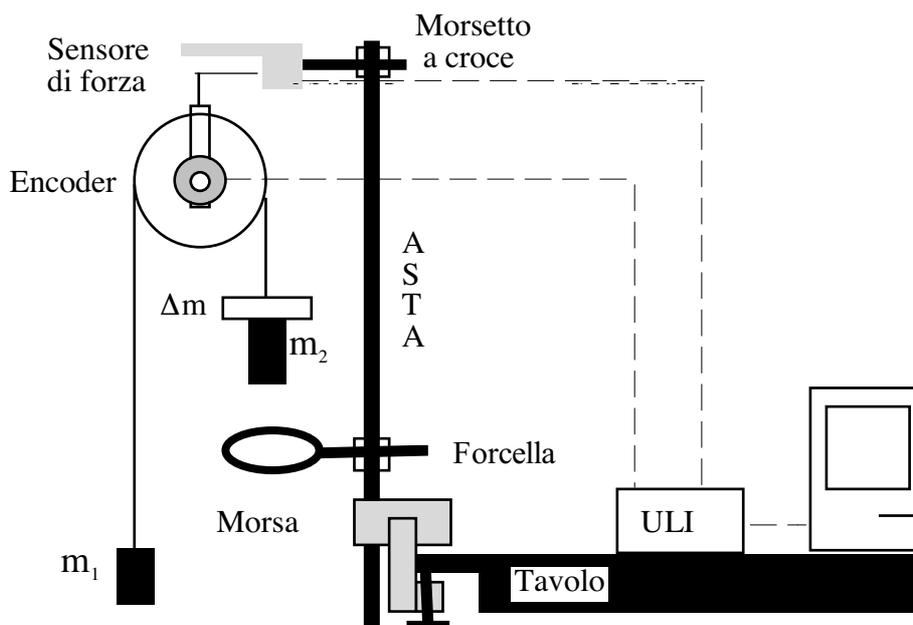


Figura 3

Per ottenere una macchina di Atwood adatta agli esperimenti descritti nel seguito, senza dover affrontare costi elevati, abbiamo utilizzato una normale morsa da tavolo avvitando alle ganasce due blocchetti metallici in cui si è fresata una scanalatura verticale a "V" nella quale si stringe una lunga asta rigida (un tubo di alluminio di diametro 25 mm lungo 1.5 m), e mediante un morsetto a croce abbiamo fissato orizzontalmente all'asta una bacchetta metallica che porta il sensore di forza a cui è attaccata la puleggia (figura 3).

La puleggia è un disco di metallo (3 mm di spessore e raggio  $R=5$  cm) con una sottile cava sul bordo per alloggiare il filo (lenza da pesca in dacron da 0.3 mm,  $\lambda=0.125$  g/m) e con asse solidale ad un sensore di rotazione. Il momento di inerzia può essere variato usando pulegge di materiale diverso (ad esempio alluminio o ottone<sup>3</sup>).

Le masse  $m_1$  e  $m_2$  sono cilindri metallici pieni, appesi mediante una vite con foro assiale (da 1mm) in cui passa il filo ma non il nodo finale.

La forcella è una bacchetta (anch'essa fissata all'asta mediante morsetto) terminante con un anello il cui diametro è abbastanza grande da lasciar passare facilmente la massa cilindrica e abbastanza piccolo da trattenere una massa aggiuntiva (un disco forato al centro) sovrapposta al cilindro. Per evitare oscillazioni indesiderate delle masse all'inizio del moto, senza dover ricorrere ad un operatore con mano particolarmente ferma, si può usare un piccolo elettromagnete per trattenere il cilindro più leggero che porta una vite in ferro avvitata al centro della sua base.

Il sistema di acquisizione dati è basato su una interfaccia che collega un computer (Macintosh o PC) al set dei sensori utilizzati. Il microprocessore residente sulla interfaccia ha il compito di attivare le operazioni di misura seguendo le istruzioni che il software residente sul computer gli invia. La comunicazione fra la interfaccia e il computer avviene tramite una linea seriale RS232. Abbiamo sperimentato con successo sia l'interfaccia ULI della ditta Vernier, sia l'interfaccia 500 della ditta Pasco<sup>4</sup>.

Il sensore di forza è costituito da un estensimetro che misura la flessione di un braccio elastico cui è appesa la puleggia, e fornisce la somma delle tensioni ai due capi del filo<sup>5</sup>.

Il sensore di posizione utilizzato è costituito da un *encoder* ottico solidale alla puleggia che ne misura l'angolo di rotazione  $\alpha$  in funzione del tempo; una volta misurato il raggio  $R$  della

<sup>3</sup> La densità dell'alluminio è circa 2.7 g/cm<sup>3</sup>, quella dell'ottone circa 8.6 g/cm<sup>3</sup>.

<sup>4</sup> Si tratta di interfacce sostanzialmente equivalenti (possono infatti utilizzare i medesimi sensori), che differiscono essenzialmente nel software di acquisizione e di manipolazione dei dati..

<sup>5</sup> Se il peso della puleggia viene sottratto durante la calibrazione del sensore.

puleggia si ottiene direttamente lo spostamento lineare  $x$  delle masse appese in funzione di  $\alpha$  come  $x=R\alpha$ .

Le misure di posizione possono essere effettuate anche con un sensore ad ultrasuoni (sonar), tenendo presente però che in questo caso lo spettro delle configurazioni del sistema che è possibile studiare è limitato da alcuni fattori: il moto di uno dei due corpi può disturbare le misure relative al moto dell'altro corpo, l'angolo di visuale del sensore è piuttosto ridotto (15 gradi), il corpo deve trovarsi ad una distanza dal sensore non inferiore a 40 cm. Un sensore di questo tipo può essere consigliabile in una fase introduttiva dello studio, soprattutto se gli studenti hanno già avuto occasione di usarlo per altri esperimenti, ma per poter effettuare indagini più sofisticate è necessario utilizzare uno strumento più flessibile e più preciso quale l'encoder ottico.

Date le caratteristiche del software utilizzato, è possibile rappresentare qualsiasi grandezza misurata (direttamente o indirettamente inserendo la formula corrispondente) in funzione di qualsiasi altra grandezza ed effettuare fit su porzioni selezionate dei grafici. La notevole flessibilità dello strumento grafico è una delle caratteristiche di questo tipo di interfacce più interessanti dal punto di vista didattico, in quanto permette agli studenti di confrontare agevolmente approcci diversi alla descrizione del moto (ad esempio in termini di variabili cinematiche, di forze, di energia, di momento angolare), di valutarne le diverse potenzialità e di individuare criteri per la selezione dell'approccio più efficace in funzione dello specifico problema da risolvere.

### 3. L'esperimento originale di Atwood

Interfacchiando la macchina di Atwood con un calcolatore la velocità di caduta può ovviamente essere misurata senza bisogno di utilizzare il complesso dispositivo ideato da Atwood. Tuttavia l'esperimento originale può essere didatticamente interessante in quanto rappresenta un esempio di passaggio praticamente istantaneo da un moto con accelerazione costante ad un moto a velocità costante e permette quindi di aprire con gli studenti una discussione sul concetto di velocità istantanea come quella velocità che il corpo avrebbe se in quell'istante venisse improvvisamente a mancare la forza che è causa del moto accelerato.

Una discussione dell'esperimento di Atwood potrebbe inoltre aiutare gli studenti a superare le difficoltà, riscontrate anche a livello universitario, nel differenziare i concetti di posizione, velocità e accelerazione, nonché la tendenza ad introdurre comunque una forza nella stessa direzione del moto (McDermott,1986).

L'esperimento di cui riportiamo i dati sperimentali in figura 4 è stato effettuato con una massa totale  $m_1+m_2 = 243.4$  g e con una differenza di massa tra i due corpi  $\Delta m=6.6$  g (costituita da un dischetto di plexiglas, di diametro maggiore dell'apertura della forcina, appoggiato sul corpo che scende).

Si è qui usata una puleggia in ottone, con grande momento di inerzia: dal valore della sua massa  $m_p= 196$  g si può stimare che la sua massa inerziale sia  $M\approx 98$  g. In queste condizioni il moto è caratterizzato da un tratto con accelerazione costante a  $\approx 0.2$  m/s<sup>2</sup>, quindi facilmente osservabile ad occhio nudo e sullo schermo.

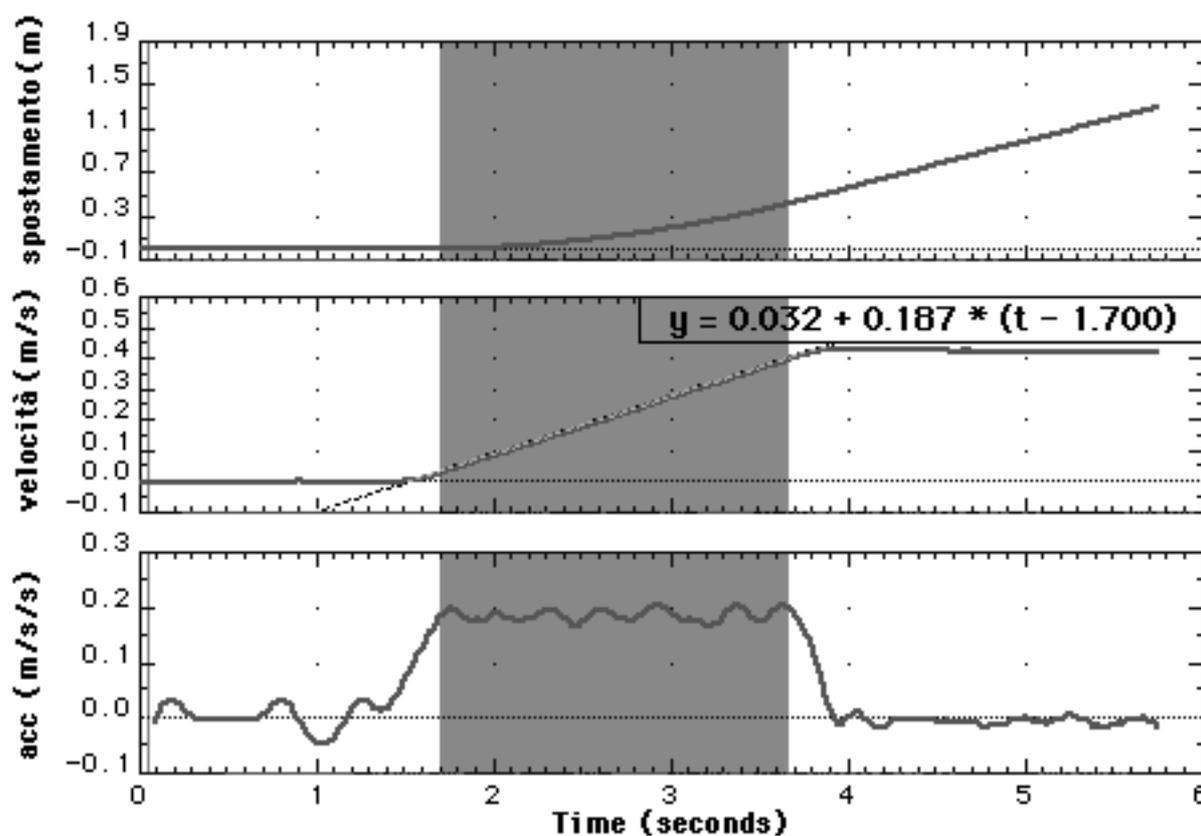


Figura 4

I grafici mostrano l'andamento dello spostamento, della velocità e dell'accelerazione in funzione del tempo. In essi è distinguibile un primo tratto in cui il sistema è mantenuto fermo trattenendo il corpo di massa minore, un secondo tratto in cui il corpo si muove con *accelerazione* costante e un terzo tratto in cui il moto è a *velocità* costante.

Il valore dell'accelerazione può essere ricavato effettuando un fit opportuno sui grafici, selezionando solo i punti che si vogliono includere nell'interpolazione (zona grigia in figura 4). Da un punto di vista didattico è interessante far notare che il grafico della velocità in funzione del tempo si presta meglio per questa operazione rispetto al grafico spostamento/tempo in quanto permette di individuare con maggiore precisione l'intervallo di tempo sul quale effettuare l'interpolazione.

Dalla accelerazione ricavata dal grafico ( $a=0.187 \text{ m/s}^2$ ) si può ottenere una prima stima sperimentale della massa inerziale della puleggia, attraverso la relazione (3).

Si ottiene  $M \approx 103 \text{ g}$ . Questo valore, che è in eccesso di circa 5% rispetto a quello stimato attraverso la geometria, suggerisce che non si possa trascurare l'inerzia dell'encoder (asse, cuscinetti etc.).

D'altra parte è anche ragionevole supporre che la presenza di una forza di attrito  $F_a$  non trascurabile sull'asse della puleggia possa darci una accelerazione *misurata per difetto* (cfr. relazione 4), e quindi una stima in eccesso del valore di  $M$ .

La relazione 4 non consente, usando i dati ottenuti *in una sola misura*, di separare il contributo di  $M$  e di  $F_a$  al valore misurato della accelerazione.

Questo risultato si può ottenere invece eseguendo *una serie di misure* dell'accelerazione del corpo al variare della forza agente sul sistema, a parità di massa totale, cioè spostando via via una certa massa da un corpo all'altro.

Se si riportano tali misure in un grafico con la forza ( $\Delta mg$ ) agente sul sistema in ordinata e la accelerazione (misurata) in ascissa, si può controllare se la forza di attrito può essere considerata costante (andamento lineare) e in tal caso l'intercetta con l'asse delle ordinate fornisce il valore della forza di attrito  $F_a$ , mentre il coefficiente angolare  $\alpha$  della retta rappresenta la massa inerziale del sistema e può quindi essere utilizzato per calcolare la massa efficace della puleggia  $M$ .

Un esempio di tale grafico, ottenuto utilizzando due corpi, ciascuno di massa 137.7 g , e 10 masse aggiuntive da 1.16 g ciascuna (cosicché  $m_1+m_2 = 287 \text{ g}$ )<sup>6</sup> , è riportato in figura 5.

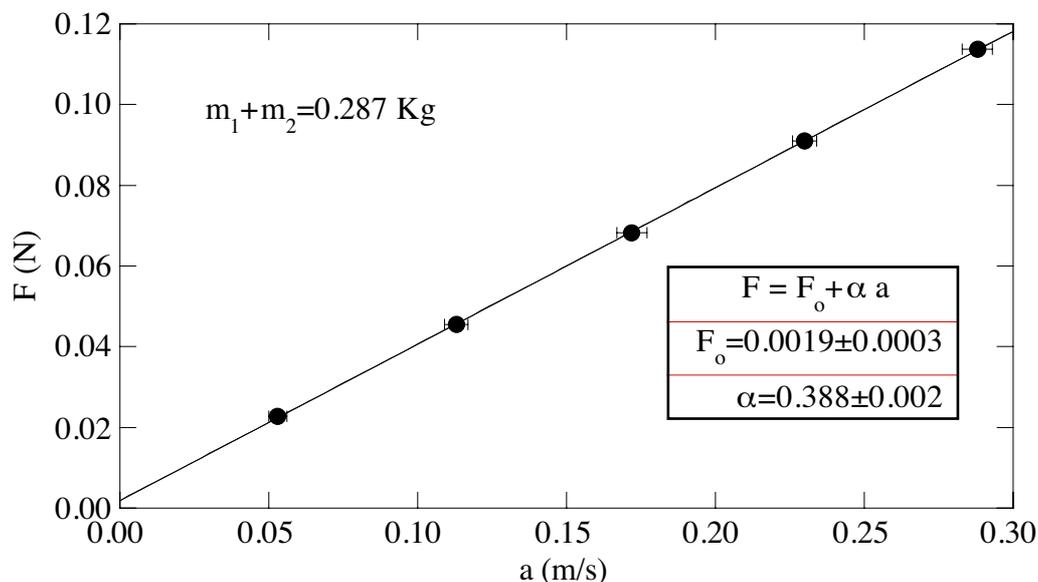


Figura 5

Quando i pesi aggiuntivi sono ugualmente ripartiti la forza risultante è nulla; ogni volta che uno dei pesi aggiuntivi viene spostato da un lato all'altro, la forza aumenta della quantità  $\Delta F = 2 \times 0.0012 \times 9.81 = 0.023 \text{ N}$ .

Nel caso riportato in figura 5 otteniamo  $F_0 \approx (1.9 \pm 0.3) \times 10^{-3} \text{ N}$  e  $\alpha = (0.388 \pm 0.002) \text{ kg}$ , che fornisce  $M = \alpha - (m_1 + m_2) = (0.101 \pm 0.002) \text{ kg}$ .

### 3.1 La tensione del filo in condizioni statiche e dinamiche

E' interessante analizzare il grafico della forza misurata dal sensore (cioè la somma delle tensioni ai capi del filo) in funzione del tempo. In figura 6 è riportato tale grafico relativo all'esperimento classico di Atwood, in cui  $m_1 = 118.4 \text{ g}$ ,  $m_2 - m_1 = 29 \text{ g}$ ,  $M = 101 \text{ g}$ .

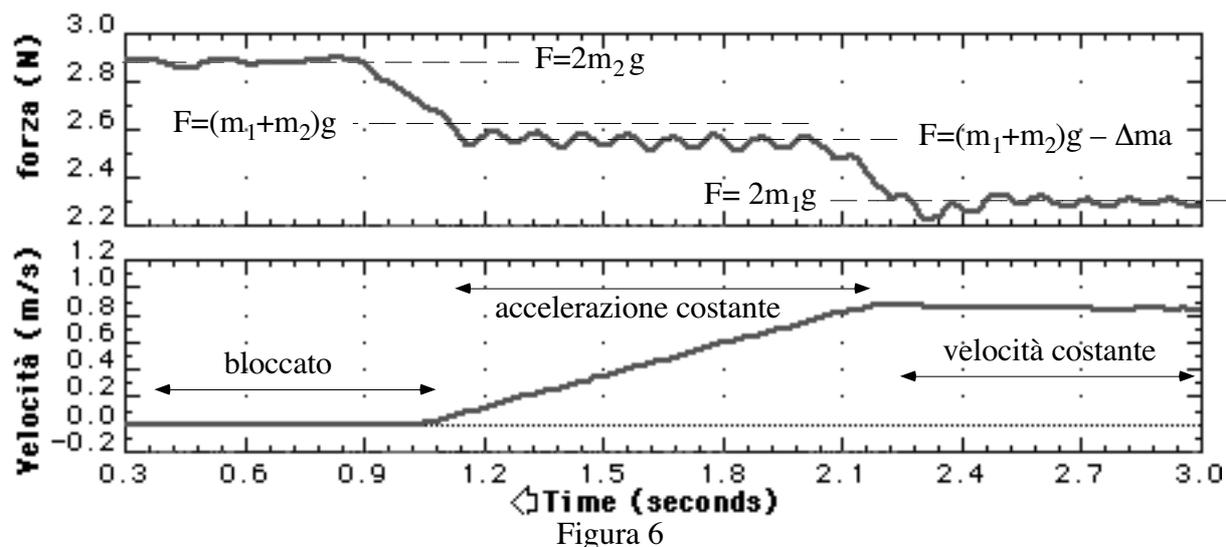


Figura 6

<sup>6</sup> Abbiamo usato una bilancia con precisione al decimo di grammo, e utilizzate 10 rondelle metalliche uguali, di peso complessivo 11.6 g.

Quando il sistema è mantenuto fermo trattenendo la massa minore ( $m_1$ ), la tensione è la stessa ai due capi del filo e la forza vale il doppio del peso della massa maggiore  $F=2\tau=2m_2g= 2.89$  N. Quando il sistema è lasciato libero di muoversi si può mostrare, sommando membro a membro le relazioni (1), che la forza vale

$$F=\tau_1+\tau_2 = (m_1+m_2)g-(m_2-m_1)a=(m_1+m_2)g-[(m_2-m_1)^2/(m_1+m_2+M)]g \quad (6)$$

un valore (2.58N) inferiore al precedente, ma anche inferiore<sup>7</sup> alla somma dei pesi delle due masse  $(m_1+m_2)g=2.61$  N.

Quando la massa in eccesso viene trattenuta dalla forcetta il valore della forza diventa  $F=2\tau=2m_1g=2.32$  N, esattamente lo stesso valore che si avrebbe se i due corpi fossero appesi al filo fermi.

Il fatto che la forza totale agente sulla puleggia sia inferiore alla somma dei pesi dei due corpi quando il moto è accelerato e che risulti invece uguale ad essa nel caso del moto a velocità costante è di solito contrario all'intuizione degli studenti, e dunque può fornire lo spunto per una discussione interessante sulla interpretazione del moto in termini di seconda legge di Newton (McDermott, 1994).

#### 4. Oscillazioni con la macchina di Atwood

Una delle caratteristiche che rendono particolarmente stimolante l'uso della macchina di Atwood a scopi didattici è il fatto che con minime variazioni del sistema si possono ottenere moti con caratteristiche molto diverse.

Un esempio interessante è costituito dal moto che si ottiene quando la massa trattenuta dalla forcetta è leggermente superiore alla differenza di massa tra i due corpi.

In questo caso, dopo il passaggio attraverso la forcetta, sul sistema agisce una forza *contraria* al moto di caduta del corpo il quale decelera fino a fermarsi e poi risale, riaggancia la massa appoggiata sulla forcetta e prosegue generando così un moto di tipo oscillatorio.

Un grafico dello spostamento in funzione del tempo, caratteristico di questo moto, è riportato in figura 7, ottenuta con  $m_1=123$  g,  $m_2=118.4$ g e  $\Delta m=8.7$ g e la solita puleggia con massa inerziale  $M=101$ g.

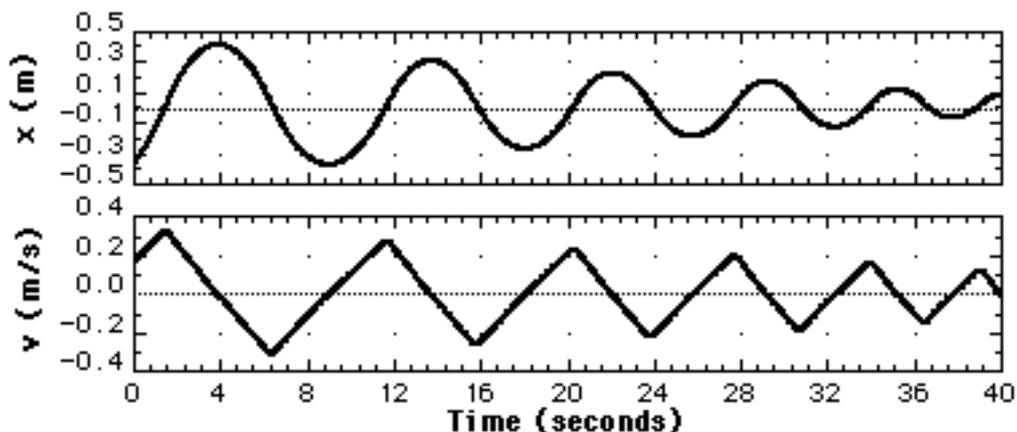


Figura 7

Quello che colpisce, a prima vista, è che il grafico dello spostamento in funzione del tempo appare molto simile a quello caratteristico di un moto armonico smorzato.

Questa impressione scompare tuttavia immediatamente se si osserva il grafico della velocità in funzione del tempo: la velocità, come era prevedibile, varia linearmente nel tempo, con

<sup>7</sup> Nel nostro caso il termine  $(m_2-m_1)a$  è piccolo, dato che  $a \ll g$  e  $m_2-m_1 \ll m_1+m_2$ , ma può essere reso più facilmente apprezzabile utilizzando  $(m_2-m_1) > 30$ g.

discontinuità nel valore dell'accelerazione dovute alle due diverse forze agenti sul sistema nelle due diverse configurazioni.

La forma del grafico dello spostamento in funzione del tempo, che può essere scambiata per una senoide, è in realtà il risultato della composizione di due parabole, una con concavità rivolta verso l'alto e l'altra verso il basso.

Particolarmente interessante è anche l'analisi comparata del grafico della velocità e dell'accelerazione in funzione del tempo (figura 8), soprattutto se effettuata in tempo reale, mentre il fenomeno avviene, o utilizzando la funzione "Replay" che permette di ri-visualizzare l'acquisizione dei dati.

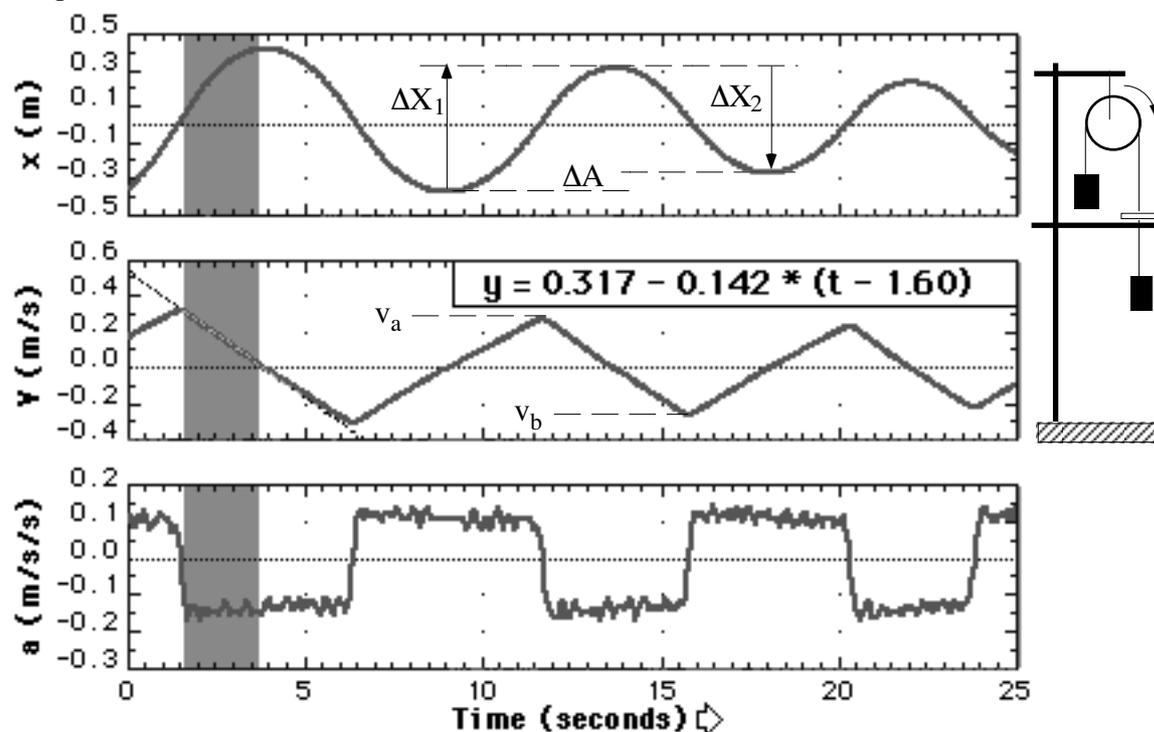


Figura 8

#### 4.1 L'effetto dell'attrito

Osservando i grafici della velocità verso il tempo in maggior dettaglio si può riconoscere che la pendenza non è costante nemmeno nei tratti in cui il sistema mantiene la stessa configurazione. Ad esempio nel tratto in cui la massa  $m_2$  scende dopo aver lasciato sulla forcilla la massa  $\Delta m$ , si ottiene un valore di accelerazione di  $-(0.142 \pm 0.002) \text{ m/s}^2$  (figura 8), mentre si ottiene un valore di  $-(0.128 \pm 0.002) \text{ m/s}^2$  nel tratto in cui  $m_2$  risale, dopo essersi fermata all'estremo inferiore dell'oscillazione (figura 9).

Tale piccola discontinuità nell'accelerazione ( $|\Delta a| = 0.014 \pm 0.003 \text{ m/s}^2$ ), riscontrabile anche nel grafico della accelerazione verso il tempo, è dovuta alla presenza dell'attrito. Infatti nella porzione del moto selezionata in figura 8 la puleggia ruota in verso orario, mentre in quella selezionata in figura 9 essa ruota in verso antiorario, e quindi la forza di attrito ha verso *concorde* con l'accelerazione nel primo caso e *discorde* nel secondo caso.

Una valutazione quantitativa di questo effetto si ottiene calcolando la forza di attrito tramite la relazione  $F_a = (|\Delta a|/2)(m_1 + m_2 + M)$ . Nell'esempio riportato si ha  $F_a = (2.4 \pm 0.5) \times 10^{-3} \text{ N}$ , valore compatibile con quello ricavato in figura 5.

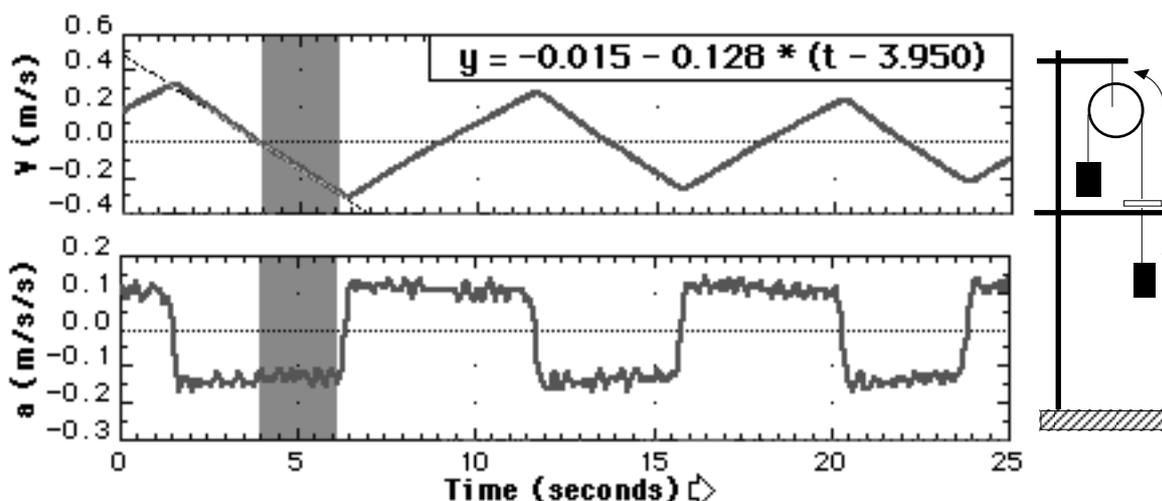


Figura 9

#### 4.2 Considerazioni sull'urto anelastico

La forza d'attrito  $F_a$  è senz'altro una causa dello smorzamento dell'oscillazione, ma in questo moto vi è un secondo effetto che provoca una periodica perdita di energia: si tratta dell'urto anelastico della massa aggiuntiva  $\Delta m$  con la forcella, in discesa, e con la massa che la raccoglie, in salita.

L'energia dissipata in un ciclo  $\Delta E$  è infatti la somma del lavoro compiuto dalla forza  $F_a \Delta x$  (dove  $\Delta x$  è la distanza percorsa in un ciclo), dell'energia cinetica  $E_{c1} = (\Delta m/2)v_a^2$  ceduta nell'urto di  $\Delta m$  con la forcella ( $v_a$  è la velocità di  $m_2$  subito prima dell'urto), e dell'energia cinetica  $E_{c2} = (v_b^2/2)(m_1 + m_2 + M) - (v_c^2/2)(m_1 + m_2 + M + \Delta m)$  ceduta nell'urto di  $m_2$  con  $\Delta m$  ( $v_b$  e  $v_c$  sono le velocità di  $m_2$  rispettivamente subito prima e subito dopo l'urto). Imponendo la conservazione della quantità di moto nel secondo urto anelastico si ottiene:

$$\Delta E = F_a \Delta x + (\Delta m/2)[v_a^2 + v_b^2(m_1 + m_2 + M)/(m_1 + m_2 + M + \Delta m)] \approx F_a \Delta x + (\Delta m/2)(v_a^2 + v_b^2).$$

Questo ragionamento ci consente di stimare il valore di  $F_a$  in modo indipendente, attraverso il bilancio energetico in un ciclo, uguagliando cioè l'energia dissipata  $\Delta E$  alla variazione di energia potenziale  $\Delta U = (m_2 + \Delta m - m_1)g\Delta A$  tra due istanti successivi in cui la massa  $m_2 + \Delta m$  raggiunge valori di massima elongazione *negativa*, (altezza massima per  $m_2 + \Delta m$  e minima per  $m_1$ , cfr. figura 8) e velocità *nulla*.

Nell'esempio qui considerato (nel ciclo compreso tra il primo e il secondo minimo di  $X$ ) lo spostamento complessivo è  $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = (1.28 \pm 0.01)\text{m}$ , le velocità subito prima di ciascuna collisione sono  $v_a = (0.28 \pm 0.002)\text{m/s}$  e  $v_b = (0.26 \pm 0.002)\text{m/s}$ , e il dislivello  $\Delta A = (0.104 \pm 0.004)\text{m}$ ; di conseguenza si ottiene  $\Delta U = (4.5 \pm 0.5) \times 10^{-3}\text{J}$  e  $\Delta E = (6.3 \pm 0.3) \times 10^{-4}\text{J}$ , valori che forniscono per la forza di attrito  $F_a = (3.0 \pm 0.4) \times 10^{-3}\text{N}$ .

Si vede che il contributo della dissipazione per urto è dell'ordine del 16% di quello dovuto all'attrito. Questo contributo diventa tuttavia più importante al crescere di  $\Delta m$  in quanto dipende quadraticamente dalla massa trattenuta dalla forcella (dato che il fattore  $v_a^2 + v_b^2$  è proporzionale a  $\Delta m$ ).

## 5. Oscillazioni in acqua

Moti oscillatori del tipo sopra considerato non vengono di solito analizzati nell'insegnamento della fisica a livello secondario. Ci sembra invece che un confronto fra questo tipo di moto e quello, più frequentemente considerato, dell'oscillatore armonico possa essere didatticamente

efficace proprio perché dal confronto emergono in maniera più evidente le caratteristiche salienti di ciascun fenomeno.

Può essere utile allora cercare altre situazioni nelle quali il moto del sistema presenti caratteristiche analoghe a quello sopra considerato. Un modo per creare una discontinuità nella forza agente sul sistema è quello di far immergere il corpo che scende in un vaso contenente un liquido, ad esempio acqua (figura 10).

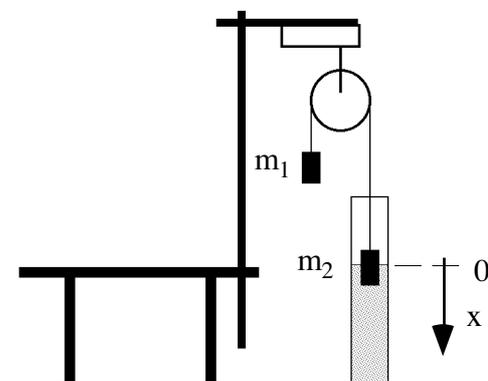


Figura 10

La forza di Archimede agente sul corpo che si immerge realizza una forza contraria al moto e, con una opportuna scelta dei valori delle masse e dei volumi, si può ottenere una situazione in cui la differenza fra le masse dei due corpi appesi al filo sia *minore* della massa di acqua corrispondente al volume del corpo immerso.

Il corpo che scende, immergendosi nell'acqua, proseguirà quindi nel suo moto verso il basso con una velocità decrescente e risalirà verso l'alto per poi riaffondare, realizzando così un moto oscillatorio simile a quello discusso in precedenza.

In figura 11 sono riportati i grafici dello spostamento, della velocità e della accelerazione in funzione del tempo, ottenuti con una scelta dei parametri tali che l'accelerazione fuori e dentro all'acqua ha approssimativamente lo stesso valore assoluto ( $m_1=135.0\text{g}$ ,  $m_2=143.6\text{g}$ , massa inerziale totale  $378.6\text{g}$ , diametro del cilindro che si immerge  $=15\text{ mm}$ , volume del cilindro  $\approx 20\text{ cm}^3$ ). In queste condizioni quando il sistema è all'equilibrio il cilindro è immerso nell'acqua circa per *metà del suo volume*. In altri termini: la differenza tra le due masse ( $m_2-m_1=\Delta m=8.6\text{g}$ ) è pari alla massa d'acqua spostata da mezzo cilindro<sup>8</sup>.

Questi grafici sono molto simili ai precedenti nella fase iniziale del moto, ma differiscono nella fase finale (per  $t > 40\text{ s}$ ). Dopo un certo numero di oscillazioni infatti, quando il cilindro non esce più completamente dall'acqua, il moto appare *armonico* smorzato, come si può mettere in evidenza amplificando la porzione dei grafici che si riferisce alla parte finale del moto (figura 12).

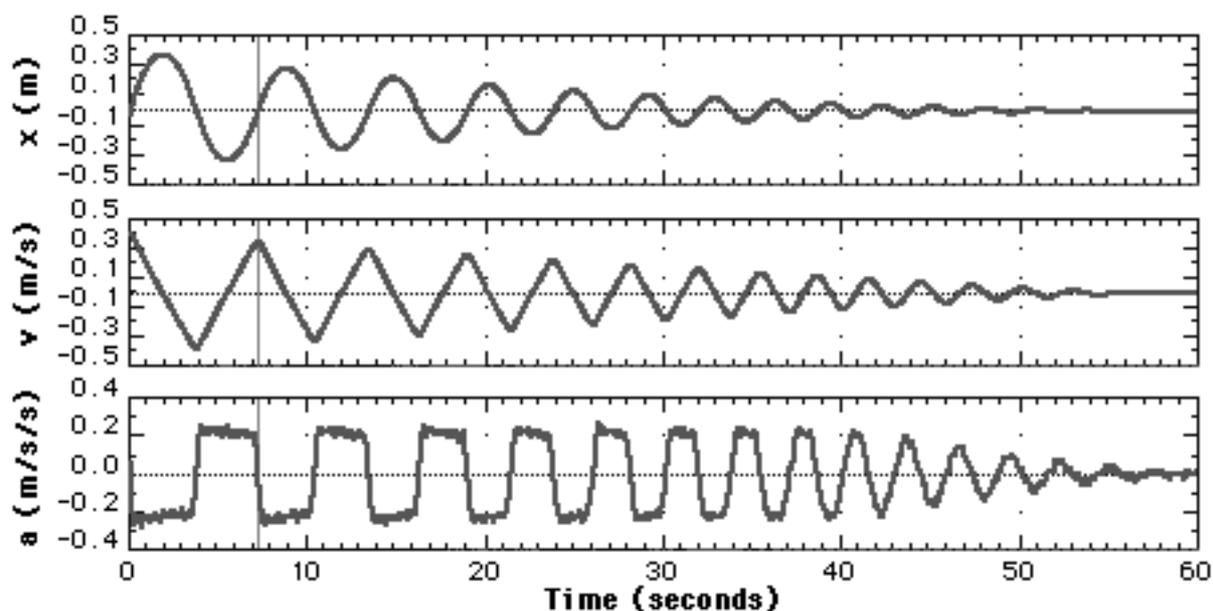


Figura 11

<sup>8</sup> Il cilindro usato qui è alto circa 11 cm, ma ha le estremità arrotondate per ridurre lo smorzamento.

## 5.1 Fase finale del moto

Il moto complessivo del cilindro può essere rappresentato cioè da due modelli, ciascuno dei quali si adatta a descrivere una fase del moto: un moto oscillatorio *non armonico* (fase iniziale, figura 11) e un moto *armonico* smorzato (fase finale, figura 12). Si può agevolmente notare che in questa seconda fase le successive operazioni di derivazione rispetto al tempo trasformano la curva che descrive lo spostamento in curve simili per velocità e accelerazione, ogni volta con uno sfasamento di  $\pi/4$ , come ci si deve attendere per una funzione sinusoidale smorzata.

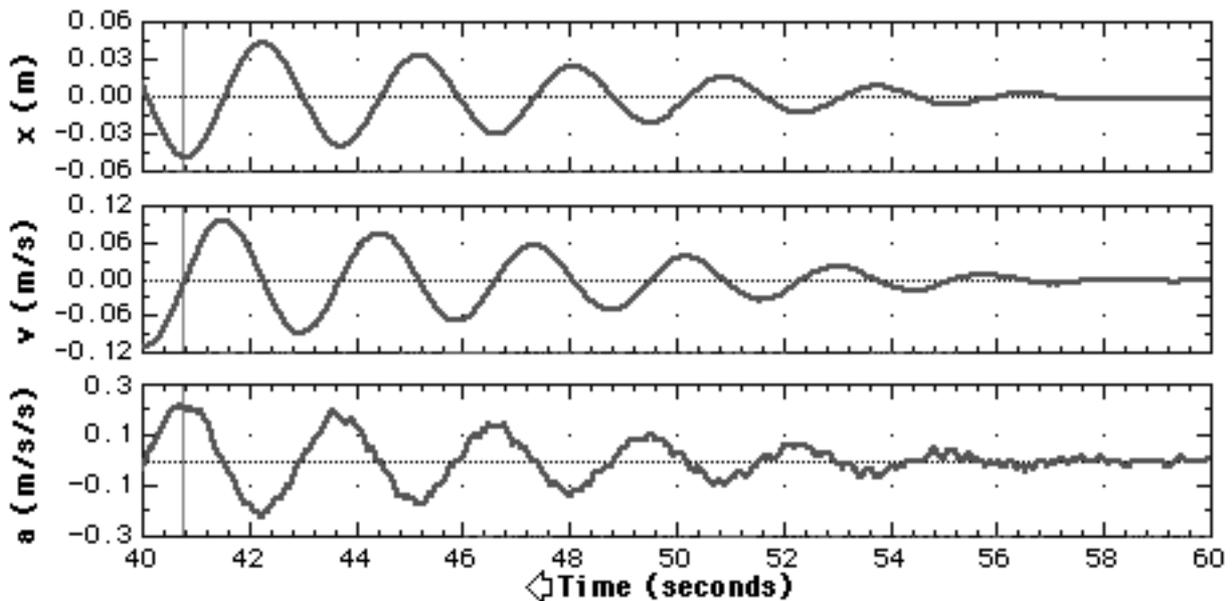


Figura 12

Possiamo ampliare il modello descritto nel §1 per ricavare l'espressione della accelerazione del cilindro in funzione della distanza, nella fase finale del moto.

La forza agente sul cilindro in acqua è la somma della forza di gravità ( $m_2g$ ) diretta verso il basso<sup>9</sup>, della forza di Archimede ( $F_A = \pi r^2 x \rho g$ ) e della tensione del filo ( $\tau_2$ ) dirette verso l'alto, dove  $x$  è l'altezza della parte immersa,  $r$  il raggio del cilindro, e  $\rho$  la densità dell'acqua. Questo ci permette di riscrivere le relazioni (1) come:

$$m_2g - F_A - \tau_2 = m_2a_2 \quad , \quad m_1g - \tau_1 = m_1a_1 \quad \text{e} \quad a_2 = -a_1 = a \quad (7)$$

Trascurando l'attrito<sup>10</sup>, possiamo calcolare anche in questo caso l'accelerazione del cilindro uguagliando il momento della forza agente sul sistema  $T$  alla derivata del momento angolare totale rispetto al tempo  $dL/dt$ .

Il momento angolare totale è lo stesso che nel caso del moto in aria  $L = (M + m_1 + m_2)vR$ , ma il momento della forza agente vale ora  $T = (m_2 - m_1)gR - F_A R$ . In definitiva si ottiene:

$$a = (\Delta mg - F_A) / (M + m_1 + m_2). \quad (8)$$

<sup>9</sup> Consideriamo positivo lo spostamento del cilindro ( $m_2$ ) verso il basso; in tal caso la forza risultante, quando il cilindro è immerso, è diretta verso l'alto e quindi negativa nel sistema di riferimento scelto. .

<sup>10</sup> Anche qui possiamo ottenere una stima quantitativa degli attriti in gioco a partire dalla differenza  $\Delta a$  fra i due valori della accelerazione corrispondenti ai due versi di rotazione della puleggia (figura 11,  $t < 40s$ ), come abbiamo fatto per il caso delle oscillazioni in aria. Per i dati riportati in figura 11 si vede che  $\Delta a / 2a$ , è ancora dell'ordine del 10%, e in effetti risulta leggermente superiore quando il cilindro è immerso rispetto a quando esso è in aria. Il contributo della massa idrodinamica invece, per un corpo con questa geometria, risulta trascurabile.

Possiamo ora esprimere la forza di Archimede in funzione dello spostamento  $X=x-x_0$  dalla posizione di equilibrio ( $x_0$  è l'altezza della parte di cilindro immersa all'equilibrio, quando cioè la forza di Archimede eguaglia la forza dovuta alla differenza tra le due masse  $m_2$  e  $m_1$ ).

$$F_A(X) = \pi r^2 \rho g (x_0 + X) = \Delta mg + kX \quad (9)$$

dove  $k=\pi r^2 \rho g$  (1.733 N/m nel nostro caso). Possiamo quindi riscrivere l'accelerazione del cilindro come:

$$a = -kX/(M+m_1+m_2) = \beta X \quad (10)$$

Questa espressione ci indica che il moto previsto è oscillatorio armonico con pulsazione  $\omega = \sqrt{k/(M+m_1+m_2)}$  e periodo  $T= 2\pi/\omega$ . Nella configurazione sperimentale considerata il valore previsto è  $T= 2.93$  s e il valore sperimentale  $T=(2.84\pm 0.08)$  s. L'equazione (10) fornisce anche una previsione teorica del valore della pendenza  $\beta$  della curva  $a(X)$ :  $\beta=k/(M+m_1+m_2) = -4.59$  s<sup>-2</sup>. In figura 13 è riportato un fit della porzione centrale del grafico  $a(X)$ : a seconda della porzione selezionata si ottiene  $-4.5$  s<sup>-2</sup>  $<\beta < -4.7$  s<sup>-2</sup>.

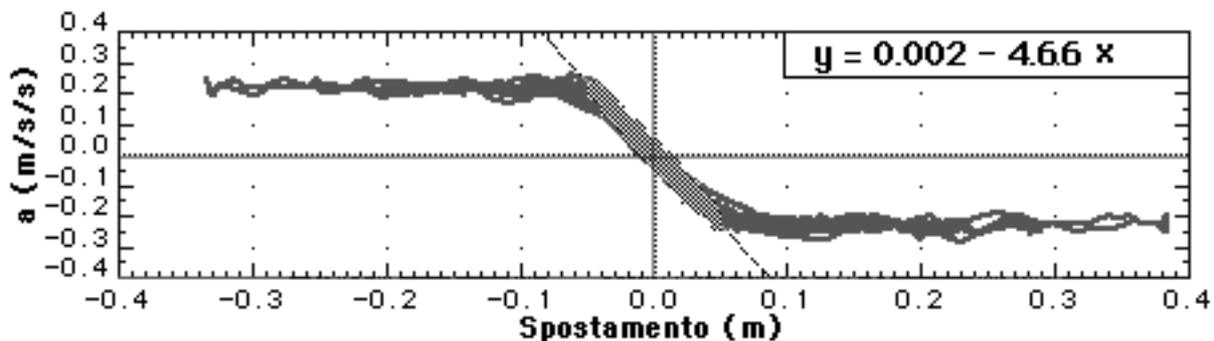


Figura 13

## 5.2 Fase iniziale del moto

Nella fase iniziale del moto, se trascuriamo il breve transiente durante il quale il cilindro attraversa la superficie dell'acqua, abbiamo a che fare con un particolare tipo di oscillatore, in cui la forza di richiamo dipende dal *segno* anziché dal *valore* dello spostamento dalla posizione di equilibrio (come accade nell'oscillatore *armonico*).

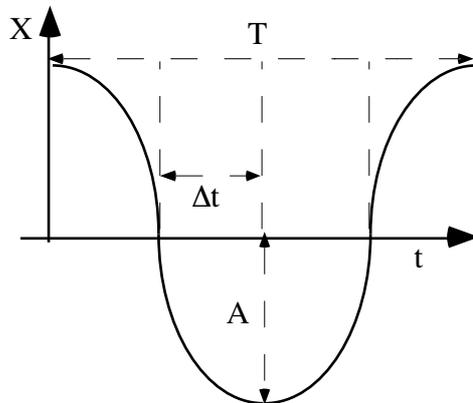


Figura 14

simmetrica<sup>11</sup> il periodo è  $T = 4\Delta t = 4\sqrt{2A/a}$ .

Nel linguaggio fisico-matematico una forza di questo tipo può essere scritta  $F=-k \operatorname{sgn}(x)$ . In questo tipo di oscillatore il periodo non è indipendente dall'ampiezza di oscillazione  $A$  (vedi figura 11) ed è facile dimostrare che è invece direttamente proporzionale alla sua radice quadrata.

Basta osservare che il grafico di figura 11 è fatto di tanti rami di parabola, e che in ogni ramo (cfr. figura 14) la relazione tra la base  $\Delta t$  e l'altezza  $A$  è descritto dalla equazione quadratica  $A=a\Delta t^2/2$ .

Quindi, nel caso particolare di oscillazione

<sup>11</sup> Il modulo (costante) della accelerazione è generalmente diverso in acqua e in aria ( $a^+ \neq a^-$ ); l'oscillazione può essere resa simmetrica scegliendo le due masse in modo di avere il cilindro immerso esattamente a metà all'equilibrio. Nel caso di oscillazione asimmetrica il periodo è invece  $T=T^-+T^+=2\sqrt{2A/a^-}+2\sqrt{2A/a^+}$

Nel nostro caso l'accelerazione vale  $\Delta mg/(M+m_1+m_2)=0.223 \text{ m/s}^2$ , e quindi ci aspettiamo che il periodo  $T$  vari con l'ampiezza  $A$  secondo l'equazione:  $T = 4\sqrt{2/a}\sqrt{A} \approx 12\sqrt{A}$ .

Utilizzando un grafico come quello di figura 11 è facile misurare (tramite il cursore scorrevole che traccia una linea verticale su tutti i grafici per un medesimo valore della coordinata  $t$ , e mostra i valori corrispondenti delle altre variabili) gli istanti  $t_i$  in cui l'accelerazione cambia segno ( $X=0$ ). Le differenze  $t_i-t_{i-1}$  forniscono i valori  $T_i/2$  che possono essere graficati verso  $A_i$ .

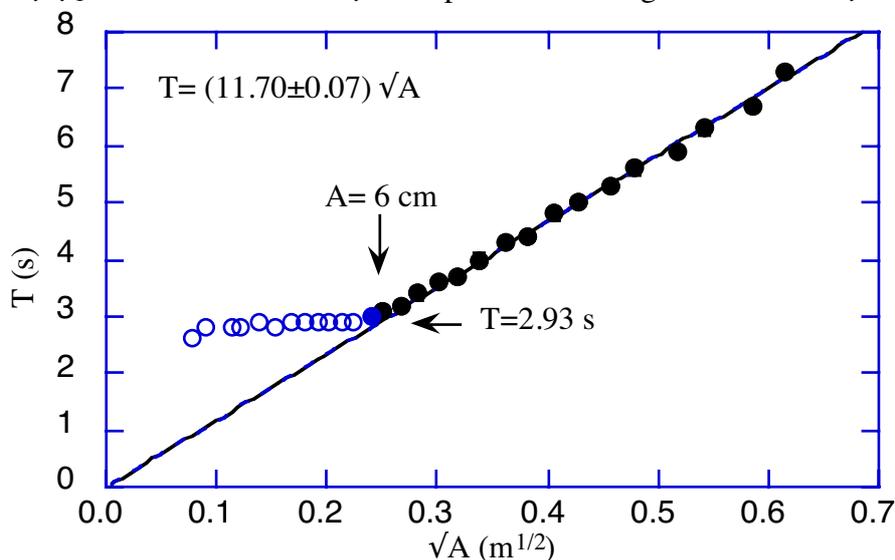


Figura 15

Ricavando dalla figura 11 i semi periodi e le ampiezze delle successive oscillazioni si ottiene il grafico di figura 15: i tondi pieni corrispondono alla prima fase del moto (abbiamo tracciato la retta che meglio interpola i punti sperimentali), mentre quelli aperti corrispondono alla seconda fase (abbiamo indicato il valore teorico  $T = 2\pi\sqrt{(m_1 + m_2 + M)/k} = 2.93 \text{ s}$  del periodo del moto armonico).

Il grafico mostra come il periodo del moto resta costante per piccoli valori dell'ampiezza  $A$ , cioè quando il cilindro è *parzialmente immerso* (per  $A < 6 \text{ cm}$ , in corrispondenza alla fase di moto armonico), e cresce con  $\sqrt{A}$  per ampiezze maggiori.

Possiamo anche ricavare teoricamente l'espressione della forza *misurata dal sensore*<sup>12</sup> in funzione di  $X$  nella fase di moto armonico.

Dalle equazioni (7) del moto delle due masse

$$m_2g - F_A - \tau_2 = m_2a_2 \quad , \quad m_1g - \tau_1 = m_1a_1 \quad e \quad a_2 = -a_1 = a$$

possiamo ricavare la forza misurata dal sensore come:

$$F = \tau_1 + \tau_2 = (m_1 + m_2)g - F_A - (m_2 - m_1)a$$

Sostituendo l'espressione della forza di Archimede e dell'accelerazione in funzione dello spostamento dalla posizione di equilibrio, ricavate in precedenza (eq. 9 e 10), si ha:

$$F = (m_1 + m_2)g - \Delta mg - kX + \Delta m kX/(m_1 + m_2 + M) = F_o - k^*X \quad (11)$$

dove  $F_o = (m_1 + m_2)g - \Delta mg = 2m_1g$  è la forza misurata dal sensore all'equilibrio,  $k = \pi r^2 \rho g$  e  $k^* = [1 - \Delta m/(m_1 + m_2 + M)]k \approx k$ .

Nella configurazione sperimentale esaminata il valore previsto di  $k$  è  $1.73 \text{ N/m}$ , mentre il valore sperimentale è  $(1.77 \pm 0.03) \text{ N/m}$  (figura 16, ove il sensore di forza è stato azzerato all'equilibrio). Questa piccola differenza è facilmente spiegabile se si tiene conto che l'acqua in cui si immerge

<sup>12</sup> Che non va confusa con la forza di richiamo che agisce sul cilindro.

il cilindro è contenuta in un vaso con diametro interno  $2R=10$  cm, e quindi non può essere trascurata la variazione del livello dell'acqua al variare di  $X$ . Se ne può tuttavia tener conto sostituendo alla variabile  $X$  la variabile  $X'=X[1+r^2/(R^2-r^2)]=1.023X$ : questo modifica il valore aspettato per  $k$  in  $k=1.77$  N/m<sup>13</sup>.

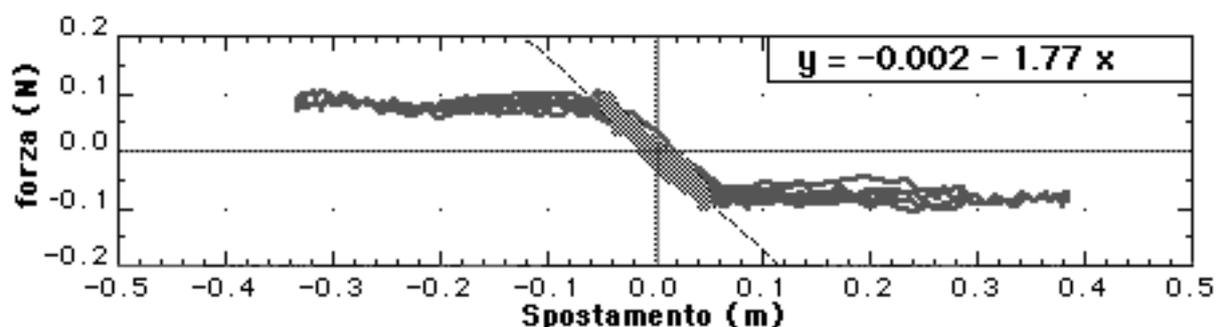


Figura 16

## 6. Il caso del doppio triangolo

Se, invece che un corpo con sezione costante come il cilindro, usiamo un solido con una diversa geometria, ci possiamo aspettare una diversa dinamica della oscillazione risultante.

Una prima geometria che si può studiare è quella di un solido la cui sezione vari in modo lineare. In questo caso la forza di Archimede, invece che dipendere dalla posizione in modo lineare, assume un andamento quadratico.

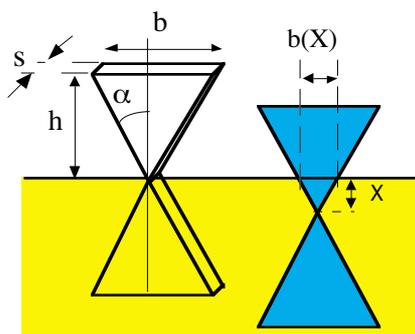


Figura 17

Supponiamo che la massa  $m_1$  che funziona da contrappeso sia dimensionata in modo da tenere anche ora il corpo in equilibrio quando esso è immerso a metà, e che questo sia formato da due triangoli isosceli uguali attaccati tra loro come mostrato in figura 17.

Anche ora possiamo utilizzare le equazioni (7) per descrivere il nuovo sistema, ma dobbiamo tener conto della nuova espressione per la forza di Archimede, pari al peso dell'acqua spostata dalla parte immersa.

Quando il doppio triangolo all'equilibrio è immerso esattamente a metà si ha  $|F_A|=sbh\rho g/2=stanc\alpha\rho gh^2=\kappa h^2=\Delta mg$ , ove  $s$  è lo spessore del triangolo,  $h$  l'altezza e  $b=2htan\alpha$  la base.

Quando il doppio triangolo viene spostato di una quantità  $X$  rispetto alla posizione di equilibrio, la forza risultante è  $F_R=\Delta mg - F_A(X)$ , pari cioè alla variazione  $\Delta F_A(X)$  della forza di Archimede rispetto al valore che essa assume all'equilibrio.

Tale variazione può essere scritta  $\Delta F_A(X)=-b(X)Xspg$ , dove  $b(X)$  è la larghezza del triangolo alla profondità  $X$  (figura 17).

Nel caso in cui  $b(0)=0$ , si ha  $b(X)=2tan\alpha|X|$ , e quindi la forza risultante è :

$$F_R = -(\kappa|X|) X \quad (12)$$

Se invece all'equilibrio il centro del doppio triangolo si trova ad una altezza  $X_o$  sopra (o sotto) la superficie dell'acqua si ha  $|F_A|=\kappa(X\pm X_o)^2=\kappa(X^2\pm 2XX_o+X_o^2)$ , e quindi la forza di richiamo oltre al termine quadratico contiene un termine lineare. Se il nostro obiettivo è studiare una forza di richiamo con andamento quadratico puro dovremo quindi fare attenzione a minimizzare  $X_o$ <sup>14</sup>.

<sup>13</sup> E corregge il valore atteso del periodo del moto armonico in  $T=2.9$  s.

<sup>14</sup>Questo spiega anche perchè è necessario usare un doppio triangolo: se usassimo un triangolo solo il valore di  $X_o$  sarebbe pari al valore della massima elongazione osservabile, e quindi l'entità del termine lineare sarebbe confrontabile con quella del termine quadratico.

Per rendere minimo  $X_o$  si deve aggiustare con cura il valore della massa che fa da contrappeso, con una procedura analoga a quella usata per bilanciare una bilancia a due bracci in condizioni dinamiche, dato che l'attrito rende grossolano il bilanciamento in condizioni statiche.

Notiamo tuttavia non è possibile in realtà eliminare completamente il termine quadratico nella forza di richiamo dato che non può essere nulla la sezione  $b(0)$  del doppio triangolo alla giunzione dei vertici.

Per la accelerazione si ricava:

$$a = -[\kappa / (m_1 + m_2 + M)] |X| X = -\gamma |X| X \quad (13)$$

dove  $\kappa = \tan \alpha \rho g$ , e  $\gamma = \kappa / (m_1 + m_2 + M)$ .

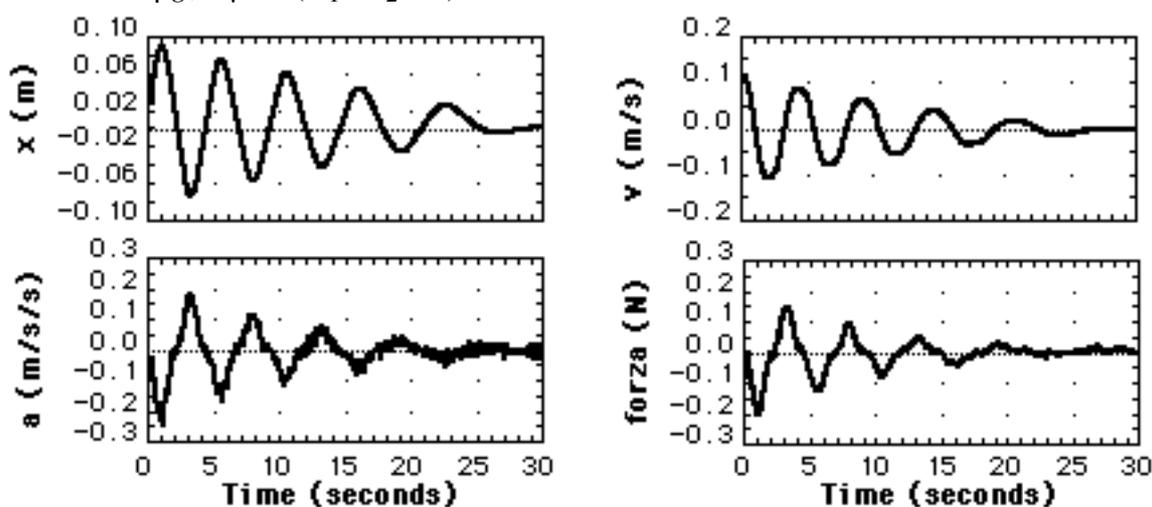


Figura 18

In figura 18 sono riportati i grafici di spostamento, velocità, accelerazione e forza misurata dal sensore, in funzione del tempo, per un doppio triangolo di ottone con  $s = 1$  cm,  $h = 10$  cm,  $b = 4.8$  cm ( $m_1 = 384.8$  g,  $m_2 = 408.9$  g,  $X_o = 0$ , volume immerso all'equilibrio  $= 24$  cm<sup>3</sup>), usando come recipiente per l'acqua un secchio di diametro interno di circa 30 cm per ridurre lo spostamento del livello dell'acqua con l'immersione del corpo.

Per il doppio triangolo da noi usato si ottiene<sup>15</sup>  $\kappa = 22.6$  N/m<sup>2</sup> e  $\gamma = 25.2$  m<sup>-1</sup>s<sup>-2</sup>.

La forza  $F$  misurata dal sensore può essere calcolata come per il caso già studiato della oscillazione del cilindro (cfr. relazione 11).

$$F = 2m_1g - \kappa' |X| X \quad (14)$$

ove  $\kappa' = [1 - \Delta m / (m_1 + m_2 + M)] \kappa = 22.0$  N/m<sup>2</sup>

Il termine costante  $2m_1g$  può essere sottratto azzerando l'uscita del sensore di forza all'equilibrio.

<sup>15</sup> Dato che nel nostro caso  $b(0) = 2$  mm, si ha  $\tan \alpha = 0.23$ .

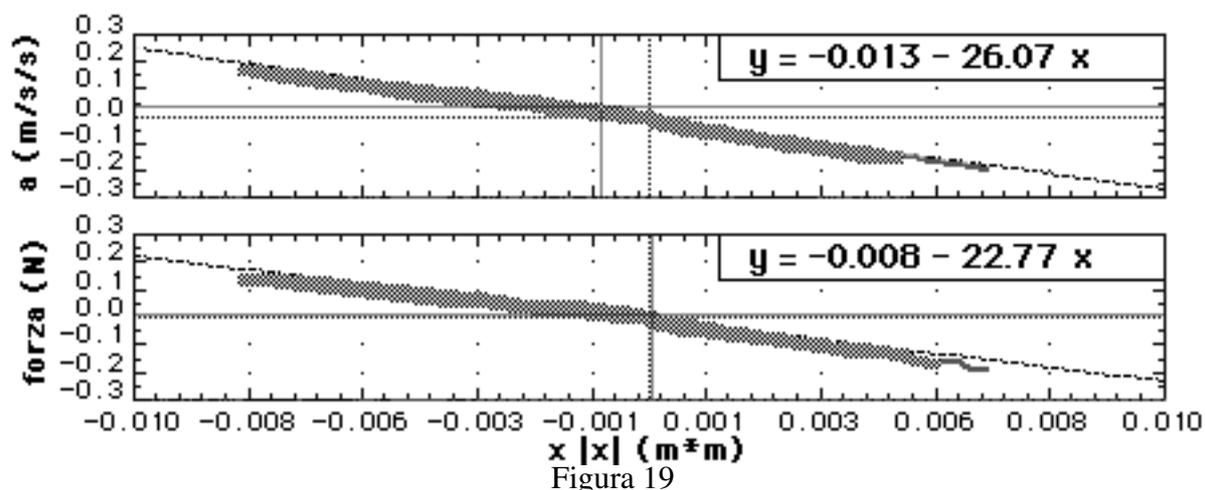


Figura 19

In figura 19 abbiamo riportato i valori della accelerazione e della forza misurata dal sensore in funzione del prodotto  $|X| X$ , e le pendenze delle rette interpolate danno rispettivamente  $\kappa' = (22.8 \pm 0.3) \text{ N/m}^2$  e  $\gamma = (26.1 \pm 0.3) \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ , in discreto accordo con i valori previsti<sup>16</sup>.

Dato che la forza di richiamo è proporzionale al *quadrato* del modulo della elongazione, si tratta ancora di un oscillatore *non-armonico*, ma ora lo studio dell'equazione del moto risulta più complicato che nel caso precedente, ed una trattazione sintetica è fornita in appendice.

Possiamo però fare una semplice analisi qualitativa per stimare almeno la *dipendenza* della frequenza dall'ampiezza.

Se nella relazione (12) consideriamo il termine tra parentesi ( $\kappa|X|$ ) come una costante elastica *efficace*  $k^*$  (nel senso che abbiamo a che fare qui con una forza di richiamo che si comporta come se fosse dovuta ad una molla la cui costante elastica *cresce con l'ampiezza*), possiamo supporre che l'andamento della frequenza possa essere espresso in funzione di  $\kappa|X|$  mediante la solita formula dell'oscillatore massa-molla ( $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m}$ ), usando al posto della *costante* elastica  $k$  della molla il prodotto  $k^* = \kappa|X|$ .

Anche se il modulo dell'elongazione  $|X|$  non è affatto una *costante*, in una stima grossolana possiamo trascurare questo fatto, sostituendo ad  $|X|$  il suo valor massimo  $A$ , e scrivere:

$$f \approx \frac{\sqrt{k^*/m_i}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m_i}} \sqrt{A} \approx 0.82 \sqrt{A} \quad (15)$$

ove  $m_i$  è la massa inerziale dell'oscillatore. Questo ragionamento ci suggerisce che la *frequenza* dovrebbe dipendere dalla *radice quadrata dell'ampiezza*. Possiamo confrontare tale previsione con i dati sperimentali, effettuando misure del periodo delle oscillazioni smorzate del doppio triangolo nello stesso modo usato per quelle del cilindro.

<sup>16</sup> L'accordo diventa ottimo se si tiene conto che per  $b(0) \neq 0$  la formula (12) si modifica in  $F_R = -\kappa[b(0)/\tan\alpha + |X|]X$ , cioè che è presente anche un *piccolo* termine lineare. (nel nostro caso dell'ordine dell' 1%).

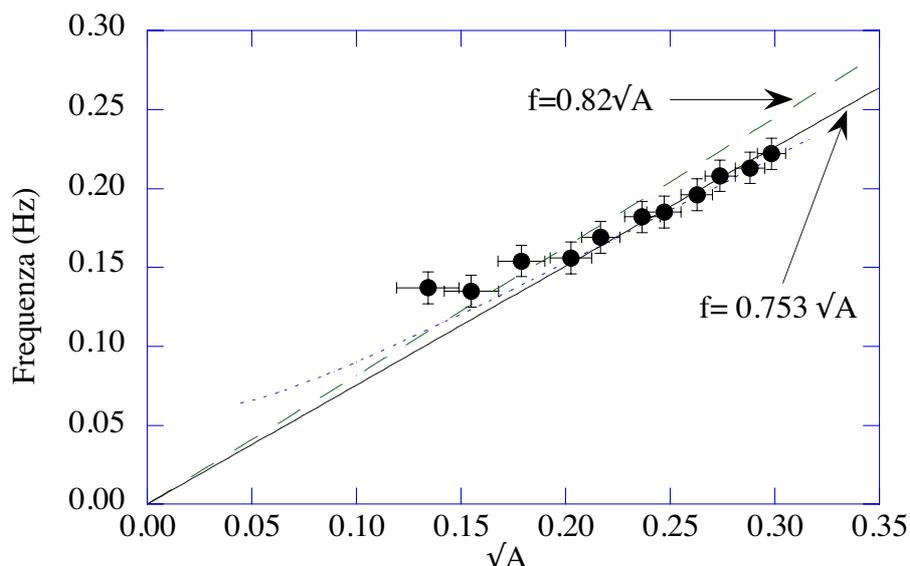


Figura 20

In figura 20 è riportato il grafico della frequenza verso la radice dell'ampiezza; si sono tracciate anche la retta per lo zero che meglio interpola i dati sperimentali [linea continua con pendenza  $(0.753 \pm 0.005)$  Hz/ $\sqrt{m}$ ] e la retta prevista dall'equazione 15 (linea tratteggiata con pendenza 0.82). Lo scarto tra pendenza sperimentale e pendenza prevista si riduce notevolmente se la stima grossolana fatta con la relazione (15) viene sostituita dalla previsione teorica ricavata dalla integrazione della legge del moto descritta in appendice (pendenza prevista 0.73 Hz/ $\sqrt{m}$ ). Se infine si tiene conto anche del termine lineare dovuto allo spessore finito (2 mm) della giunzione tra i vertici dei due triangoli, l'accordo migliora ulteriormente anche per i valori più piccoli dell'ampiezza dove l'effetto del termine lineare diventa importante (curva punteggiata in figura 20).

## 7. Il caso del doppio cono

Sostituendo il doppio triangolo con un doppio cono, il sistema si muoverà ancora di moto oscillatorio, e facendo attenzione che anche ora il corpo sia immerso, all'equilibrio, esattamente a metà ( $X_0=0$ ), la variazione della forza di Archimede sarà  $\Delta F_A(X) = -[\pi(\tan\alpha)^2 \rho g / 3] X^3$ .

Si può allora ripetere tutta la trattazione già fatta per il doppio triangolo per calcolare accelerazione e forza risultante, tenendo conto della forma diversa della funzione  $\Delta F_A(X) = -\xi X^3$ , ove  $\xi = \pi(\tan\alpha)^2 \rho g / 3$ .

Nel nostro caso (un doppio cono di ottone con raggio di base  $r = 1.5$  cm, altezza del singolo cono  $h = 10$  cm<sup>17</sup>,  $m_1 = 461$  g,  $m_2 = 494$  g,  $M = 101$  g, volume della parte immersa<sup>18</sup> circa 30 cm<sup>3</sup>),

Le relazioni che esprimono la forza di richiamo sentita dal corpo, l'accelerazione e la forza misurata dal sensore diventano rispettivamente<sup>19</sup>:

$$F_R \approx -\xi X^3, \quad (16)$$

$$a = -[\xi / (m_1 + m_2 + M)] X^3 = -\delta X^3 \quad (17)$$

$$F = 2m_1 g - \xi [1 - \Delta m / (m_1 + m_2 + M)] = F_0 - \xi' X^3 \quad (18)$$

tutte quantità che sono proporzionali al cubo della elongazione: si tratta quindi anche in questo caso di un oscillatore *non-armonico*.

<sup>17</sup> Nel calcolo di  $\tan\alpha$  si deve tener conto del fatto che i due coni sono tenuti insieme da una vite di raggio = 1.25 mm e quindi sono in realtà due tronchi di cono: di conseguenza risulta  $\tan\alpha = 0.1375$  anziché 0.15

<sup>18</sup> Per ridurre lo smorzamento alla base del cono immerso è stata attaccata una semisfera di raggio 15 mm.

<sup>19</sup> Tenendo conto del raggio  $r$  della sezione della giunzione il fattore  $X^3$  nelle (16) e (18) diventa  $[X^3 + 3(r/\tan\alpha)X + 3(r/\tan\alpha)^2 X^2]$

Di nuovo, per stimare la dipendenza della frequenza dalla ampiezza di oscillazione, possiamo riscrivere la relazione (16) come  $F = -(\xi X^2)X$ , e considerando il termine tra parentesi ( $\xi X^2$ ) come costante elastica efficace, possiamo ricavare una stima dell'andamento della frequenza:

$$f^{**} = \frac{\sqrt{k^{**}/m_i}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\xi/m_i}}{2\pi} A = 2.16 A \quad (19)$$

Questa relazione suggerisce che nell'oscillazione smorzata del doppio cono la frequenza sia direttamente proporzionale all'ampiezza.

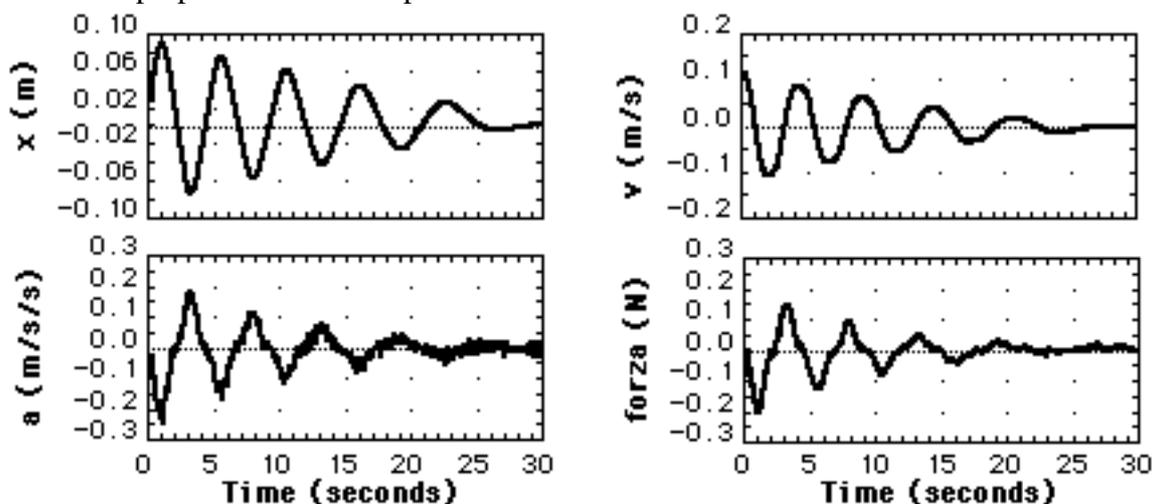


Figura 21

Una registrazione del moto è riportata in figura 21. Un confronto qualitativo degli andamenti di  $X(t), v(t), a(t)$  e  $F(t)$  di questo sistema con i corrispondenti del doppio triangolo sembrerebbe indicare che si tratti di dinamiche equivalenti: la differenza emerge invece se si analizza ad esempio il grafico della forza verso lo spostamento.

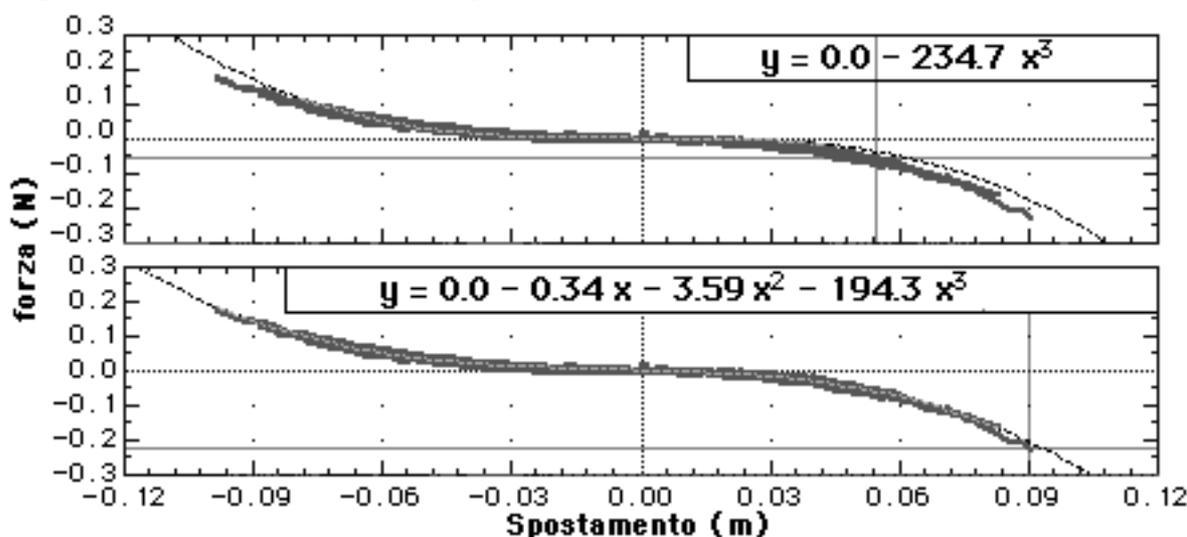


Figura 22

In figura 22 si vede a occhio che la relazione  $F(X)$  ha andamento cubico. Ma dalla interpolazione con la funzione  $F(X) = \xi' X^3$  si ottiene  $\xi' = (235 \pm 5) \text{ N/m}^3$ , contro il valore  $\xi' = 194 \text{ N/m}^3$  calcolato nella (16). Se invece interpoliamo con una cubica contenente termine lineare e quadratico otteniamo  $\xi' = (194 \pm 5) \text{ N/m}^3$ , valore in ottimo accordo con quello calcolato.

Per verificare l'atteso andamento della frequenza (proporzionale all'ampiezza) misuriamo ancora i valori di massima elongazione e i corrispondenti valori della frequenza ricavati dagli intervalli di tempo relativi ad ogni mezzo periodo (considerando cioè gli istanti in cui si azzerava la velocità).

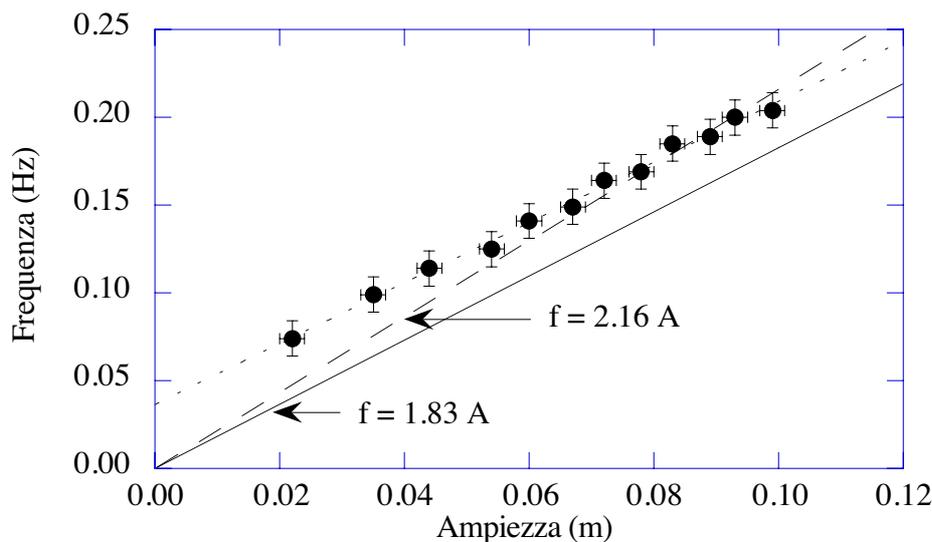


Figura 23

In figura 23 riportiamo le misure della frequenza di oscillazione del doppio cono in funzione della elongazione  $A$ . L'interpolazione di questi dati con una retta per l'origine fornisce una pendenza di 2.18Hz/m, molto prossima a quella prevista dalla relazione(19) (linea tratteggiata con pendenza 2.16Hz/m).

In figura è anche riportata la retta prevista dalla integrazione numerica della legge del moto per la forza  $F_R = -\xi X^3$  (linea continua con pendenza 1.83Hz/m). In questo caso lo scarto della pendenza sale al 15%, e resta da spiegare il sistematico spostamento in alto delle frequenze misurate rispetto ai valori previsti.

Se tuttavia, nella previsione teorica ricavata dalla integrazione numerica della legge del moto, teniamo conto anche del fatto che il doppio cono è in realtà un doppio *tronco di cono*, introducendo nella forza di richiamo anche un termine *lineare* ed uno *quadratico*, l'accordo con i dati sperimentali diventa eccellente (curva punteggiata in figura 23).

## 8. Conclusioni

Gli esempi sopra riportati mostrano come sia possibile utilizzare una macchina di Atwood interfacciata con il calcolatore per realizzare moti con caratteristiche diverse e mettere alla prova modelli fisici di descrizione ed interpretazione dei fenomeni.

Le potenzialità didattiche di tale apparecchiatura derivano da una combinazione delle caratteristiche della macchina originale con quelle del sistema di interfacciamento. La macchina di Atwood è di per sé un sistema aperto, nel quale i parametri che determinano le caratteristiche del moto sono facilmente individuabili e modificabili anche da parte degli studenti.

L'interfacciamento con il calcolatore permette di confrontare in tempo reale l'andamento del fenomeno e la sua rappresentazione in termini di grandezze fisiche, rendendo più intuitivo il significato di tale rappresentazione.

L'accuratezza delle misure ottenibili usando sensori on-line consente di studiare agevolmente l'effetto di forze di diversa natura e analizzare effetti solitamente trascurati (ad esempio l'attrito) nell'insegnamento nonostante la loro rilevanza nello studio dei fenomeni reali.

La versatilità del sistema di elaborazione consente di effettuare controlli accurati delle previsioni teoriche, stimolando a procedere per successivi raffinamenti del modello teorico utilizzato, in un percorso ciclico che suggerisce continuamente spunti per nuove riflessioni e nuove misure.

Infine la semplicità delle procedure per l'acquisizione dei dati e per la loro manipolazione consente di proporre questi esperimenti a diversi livelli di approfondimento, che possono essere scelti di volta in volta dall'insegnante in accordo con il livello di preparazione degli allievi e con la collocazione di questo studio all'interno del curriculum di insegnamento.

Quanto detto vale in generale per qualsiasi studio sperimentale che utilizzi sistemi analoghi di acquisizione e di elaborazione dei dati, ma è forse utile sottolineare con alcuni esempi come sia possibile sfruttare tali potenzialità nel caso specifico della macchina di Atwood.

L'esperimento originale può essere dapprima eseguito in modo semplificato, trascurando l'attrito, evidenziando solo gli aspetti qualitativi del moto, mentre una successiva discussione dei dati sperimentali può condurre ad una analisi più sofisticata.

La variazione dell'esperimento che introduce l'oscillazione in aria può essere utilizzata solo come stimolo per una comprensione più approfondita (per contrasto) dell'oscillatore armonico, oppure studiata più in dettaglio come esempio di un sistema dissipativo a massa variabile, analizzando l'effetto degli urti anelastici e il bilancio energetico che coinvolge energia cinetica, potenziale e lavoro della forza d'attrito.

Il moto oscillatorio del cilindro in acqua può essere studiato anch'esso solo in modo qualitativo (passaggio da moto anarmonico ad armonico), oppure in modo più dettagliato alla ricerca di un modello che preveda con precisione la dinamica del sistema (prendendo in considerazione gli effetti dell'attrito e dello spostamento del livello dell'acqua). Oppure può essere usato come conclusione di uno studio sulla forza di Archimede (preceduto in questo caso da misure ad esempio della variazione apparente di peso di un corpo quando viene immerso in un liquido...) per controllare la capacità degli studenti di utilizzare le conoscenze acquisite in una situazione reale non familiare.

Le oscillazioni del doppio triangolo e del doppio cono possono essere introdotte semplicemente come esempi di oscillatori non lineari sfruttando l'analogia con il classico oscillatore massa-molla per fare previsioni sull'andamento della frequenza in funzione dell'ampiezza, oppure essere usate per introdurre il calcolo dell'integrale del moto in sistemi non banali (che di solito si effettua solo teoricamente per fenomeni che non consentono facilmente un controllo sperimentale delle previsioni).

In definitiva questa proposta di esperimenti on-line con la macchina di Atwood, più che un pacchetto chiuso o un percorso predefinito (che, come tale, sarebbe comunque troppo impegnativo per un laboratorio didattico) vuole essere un esempio delle ricerche che è possibile realizzare con sistemi di questo tipo e un invito ad affrontare il laboratorio di fisica con lo stesso entusiasmo e la stessa curiosità che ha guidato il nostro lavoro.

## 9. Appendice

Il problema del calcolo del periodo  $T$  di un moto oscillatorio non smorzato, prodotto da una forza di richiamo qualsiasi, può essere risolto usando il principio di conservazione dell'energia (Hirata e Thiessen, 1995).

La variazione di energia cinetica  $\Delta E$  (tra  $v=0$  per  $x=x_0$ , e la generica  $v(x)$  per  $x \leq A$ ) è pari al lavoro compiuto dalla forza di richiamo, e si può quindi scrivere:

$$\frac{1}{2}mv^2(x) = \int_{x_0}^x F(x)dx = \int_{x_0}^x m a(x)dx$$

Eliminando la massa  $m$ , e risolvendo l'equazione rispetto alla velocità, si ottiene:

$$v(x) = \pm \sqrt{2 \int_{x_0}^x a(x)dx} = \frac{dx}{dt}, \quad \text{ovvero} \quad dt = \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(x)dx}}$$

L'integrale dell'ultima equazione tra l'istante in cui la elongazione è massima ( $x_0=A$ ) e quello in cui il corpo è nella posizione di equilibrio ( $x=0$ ) fornisce il valore di  $T/4$ , e quindi il periodo è:

$$T = 4 \int_A^0 \frac{dx}{-\sqrt{\frac{2}{m} \int_A^x F(x)dx}}$$

Il segno – nell’ultima equazione deriva dal fatto che quando il corpo torna verso la posizione di equilibrio la velocità è negativa.

Ora possiamo utilizzare questa formula per ottenere il periodo in un moto in cui la forza di richiamo sia del tipo  $F=-kx^n$

$$T = 4 \int_A^0 \frac{dx}{-\sqrt{\frac{2}{m} \int_A^x (-kx^n) dx}} = 2 \sqrt{\frac{m}{k}} \int_A^0 \frac{dx}{\sqrt{\int_A^x x^n dx}}$$

Il caso dell’oscillatore armonico ( $n=1$ ) è integrabile analiticamente e fornisce il noto risultato  $T=2\pi\sqrt{m/k}$ . Per la forza di richiamo  $F=-k\text{sgn}X$  si ritrova il risultato  $T=4\sqrt{2m/k}\sqrt{A}$ . Per il doppio triangolo ( $n=2$ ) e per il doppio cono ( $n=3$ ) si può usare invece un metodo di integrazione numerica<sup>20</sup>, e si ottiene rispettivamente  $T=6.87\sqrt{m/k}/\sqrt{A}$ , e  $T=7.42\sqrt{m/k}/A$ .

Naturalmente l’integrazione numerica può essere facilmente eseguita anche se la forza di richiamo è di forma polinomiale  $F=a_1x+a_2x^2+a_3x^3\dots$ . Nel caso di un doppio triangolo e di un doppio cono reali, in cui necessariamente la sezione non può essere nulla al raccordo tra i vertici, si ha rispettivamente  $F=-k(x_0x+x_0x^2)$  e  $F=-k(x_0^2x+x_0x^2+x^3)$ .

Il ragionamento fatto sin qui si applica a rigore solo a sistemi che oscillino senza smorzamento, e quindi nel caso di moto smorzato il periodo risulta approssimato (per difetto) da questo tipo di calcolo.

Il seguente calcolo dimensionale può forse risultare utile per convincere lo studente che non sia in grado di maneggiare gli strumenti matematici usati nella precedente dimostrazione e che resti perplesso di fronte al ragionamento per analogia con l’oscillatore armonico descritto nei paragrafi precedenti.

Il periodo  $T$  di un oscillatore con forza di richiamo  $F=-kx^n$  può dipendere solo dalle grandezze:

$$m \text{ [kg]}, \quad k \text{ [N/m}^{-n} = \text{kg m}^{1-n} \text{ s}^{-2}], \quad A \text{ [m]}$$

Le uniche combinazioni di queste grandezze con le dimensioni di un tempo, al variare di  $n$ , sono  $\sqrt{m/k}$  per  $n=1$ ,  $\sqrt{m/kA}$  per  $n=2$  e  $\sqrt{m/kA^2}$  per  $n=3$ . Quindi il periodo nei tre casi deve essere proporzionale rispettivamente a  $\sqrt{m/k}$ ,  $\sqrt{m/k}/\sqrt{A}$ , e  $\sqrt{m/k}/A$ . La costante di proporzionalità ovviamente può essere ricavata solo per altra via.

## Ringraziamenti

Ringraziamo Marta Gagliardi e Enzo Gandolfi, con i quali abbiamo discusso una prima versione di questo lavoro che è stata presentata al XXXV Congresso dell’AIF, e Pietro Scatturin e Paolo Bonazza per il gentile aiuto che ci hanno dato nella acquisizione e nella analisi dei dati.

## Riferimenti

- T.B. Greenslade: *Atwood’s machine*, Physics Teacher, **23**, 24-28 (1985)  
 L.C. McDermott, *Ricerche sulla comprensione dei concetti di meccanica*, La Fisica nella Scuola, **XIX**, n.2, 84-97 (1986)  
 L.C. McDermott, P.S. Shaffer and M.D. Somers: *Research as a guide for teaching introductory mechanics: an illustration in the context of the Atwood’s machine*, American Journal of Physics, **62**, 46-55 (1994)  
 C. Hirata and D. Thiessen, *The period of  $F=-k x^n$  harmonic motion*, Physics Teacher **33**, 562-564 (1995)

<sup>20</sup> Noi abbiamo usato la funzione “NIntegrate” nell’ambito del pacchetto software “Mathematica” della Wolfram Research, disponibile per PC-IBM e Macintosh in versione “Education” (a basso costo per studenti e insegnanti).