

IL PENDOLO TORSIONALE NON LINEARE: un approccio al caos con oscillatore meccanico e CBL

**Samo Lasic e Gorazd Planinsic, *Università di Ljubljana, Slovenia*
Giacomo Torzo, *Università di Padova***

Riassunto

Un pendolo torsionale oscillante in un piano verticale, interfacciato a calcolatrice grafica mediante CBL, viene proposto come strumento didattico per studiare gli aspetti principali dei sistemi non-lineari. Vengono presentati alcuni risultati sperimentali, tra cui la transizione al caos.

1. Utilità di questo apparato nella didattica

Il comportamento complicato, e qualitativamente diverso, dei sistemi non-lineari rispetto ai sistemi lineari può essere portato come esempio delle importanti conseguenze della non-linearità che è tipica di molti sistemi osservabili in natura. Un modo relativamente semplice ed efficace per esplorare la non-linearità è offerto dai sistemi oscillanti. .

L'esempio più semplice di un oscillatore non lineare è il pendolo. Il pendolo torsionale orizzontale è invece un sistema tipicamente lineare. Se però si costruisce un sistema composto dalla fusione del pendolo classico con il pendolo torsionale, semplicemente posizionando in orizzontale l'asse di torsione e caricando il corpo oscillante in modo che il baricentro risulti fuori dall'asse, si ottiene un pendolo torsionale non-lineare. Tale apparato offre tutte le caratteristiche che sono essenziali per uno studio elementare [1, 2, 3] della dinamica dei sistemi non-lineari

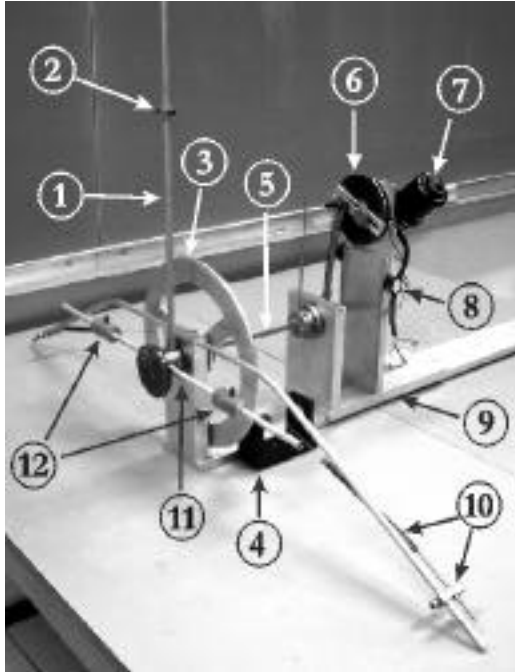
L'equazione del moto di questo pendolo torsionale è l'equazione di Duffing, che può essere risolta numericamente per ottenere una descrizione della dinamica [4, 5]. La stessa equazione di Duffing descrive anche il comportamento di alcuni circuiti elettrici non-lineari, [6] sistemi facili da allestire e da analizzare, ma che non offrono altrettanta efficacia per un uso didattico, in quanto la loro evoluzione non è osservabile *direttamente* come in un sistema meccanico.

L'apparato qui descritto è il risultato di una collaborazione Erasmus tra l'Università di Ljubljana e l'Università di Padova: a Padova è stato costruito un prototipo, basato su un modello usato nelle XXX Olimpiadi Internazionali della Fisica [7], a Ljubljana il prototipo è stato migliorato e adattato ad un uso didattico [8]. Questa seconda versione può essere agevolmente impiegata in classe per mostrare

- ❑ la dipendenza dall'ampiezza del periodo di oscillazione,
- ❑ il fenomeno dell'isteresi nella risposta alla sollecitazione sinusoidale
- ❑ la biforcazione in orbite stabili e la transizione al moto caotico.

L'apparato è stato progettato sulla base di previsioni teoriche e di simulazioni. L'obiettivo era ottenere un dispositivo di grandi dimensioni che facilitasse all'osservatore il riconoscimento e la comprensione dei fenomeni in atto. Le caratteristiche costruttive permettono una ampia scelta dei valori dei parametri che determinano il moto.

2. Descrizione dell'apparato.



1. Asta oscillante
2. Massa eccentrica
3. Anello conduttore
4. Magnete per smorzamento
5. Molla a lamina di acciaio
6. Eccentrico variabile
7. Motore da tergitristallo
8. Beeper
9. Banco mobile
10. Molle e aggiustamento della tensione
11. Volano a barra con momento di inerzia aggiustabile
12. Masse inerziali

Fig. 1 Apparato sperimentale

La parte oscillante del pendolo consiste di un'asta (1), su cui è ancorata una massa (2), e di un volano a barra (11) con due masse simmetriche (12) che permettono di variare il momento di inerzia. L'asta può essere fissata all'asse di rotazione in due modi: o rivolta verso l'alto o rivolta verso il basso. A queste due configurazioni corrispondono due tipi di forza di richiamo (>0 , <0).

Il meccanismo che produce la forzante consiste di un motore per tergitristallo (7) che pilota un disco dotato di perno eccentrico cui è attaccata una leva (6) che trasforma la rotazione del disco in oscillazione circa sinusoidale. L'ampiezza della forzante sinusoidale può essere variata nell'intervallo $0^\circ - 45^\circ$ agendo sulla posizione del perno eccentrico.

L'eccitazione viene trasferita all'asta oscillante tramite una molla a lamina di acciaio (5) la cui lunghezza efficace l può essere variata mediante un bloccaggio scorrevole posto sul banco mobile che sostiene motore ed eccentrico (9). Ciò consente di variare la costante elastica torsionale che è proporzionale a l^{-1} .

Un attrito di tipo viscoso può venire introdotto avvicinando un magnete permanente (4) all'anello conduttore (3) ricavato da un disco di alluminio spesso 4 mm.

L'aggiustamento fine della posizione di equilibrio dell'asta è ottenuta mediante due molle elicoidali il cui punto di attacco può essere spostato (10) e che applicano tensione ad un filo avvolto attorno all'asse di torsione. In questo modo si può anche modificare indipendentemente la costante elastica di ciascuna molla (la cui differenza determina il momento di richiamo verso la posizione di equilibrio).

Il beeper (8) emette un breve segnale acustico ad ogni ciclo. Questo aiuta l'osservatore a percepire la differenza di fase tra leva forzante e asta oscillante (pendolo): ciò risulta particolarmente utile nell'osservare la periodicità durante la transizione al moto caotico.

3. Modello matematico

La scelta dei valori ottimali dei parametri è essenziale per ottenere un dispositivo adatto ad una dimostrazione in classe. Vediamo quindi come intervengono i vari parametri nel modello matematico di questo pendolo di torsione.

Se l'oscillazione è limitata ad piccoli angoli θ (ad esempio inferiori a 30°) il moto è ben descritto dalla equazione di Duffing [9]

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + \alpha\theta + \beta\theta^3 = F \cos(\omega t), \quad (1)$$

dove c è lo smorzamento, i coefficienti α e β determinano la parte lineare e non lineare della forza (momento) di richiamo e $F \cos(\omega t)$ è il termine forzante (per unità di momento di inerzia).

I coefficienti sono $\alpha = \frac{k \pm mgR}{I}$ e $\beta = \mp \frac{mgR}{6I}$, dove k è la costante di torsione, m la massa eccentrica con baricentro distante R dall'asse e I il momento di inerzia.

Il segno del coefficiente β dipende dalla direzione della forza di richiamo e determina il tipo di moto del pendolo. Nel caso in cui l'asta sia fissata verso il basso β è negativo (pendolo di torsione tradizionale), mentre se l'asta è fissata verso l'alto β è positivo (pendolo di torsione invertito).

La notevole diversità tra i due sistemi è mostrata dall'andamento dell'energia potenziale (Fig. 2). Nel caso del pendolo di torsione tradizionale (Fig. 2.a) l'energia potenziale è:

$$U(\theta) = \frac{1}{2} k\theta^2 - mgR \cos\theta \quad (2)$$

e nel caso del pendolo di torsione invertito (Fig. 2.b) l'energia potenziale è:

$$U(\theta) = \frac{1}{2} k\theta^2 + mgR \cos\theta, \quad (3)$$

dove θ è l'angolo tra l'asta oscillante e la verticale.

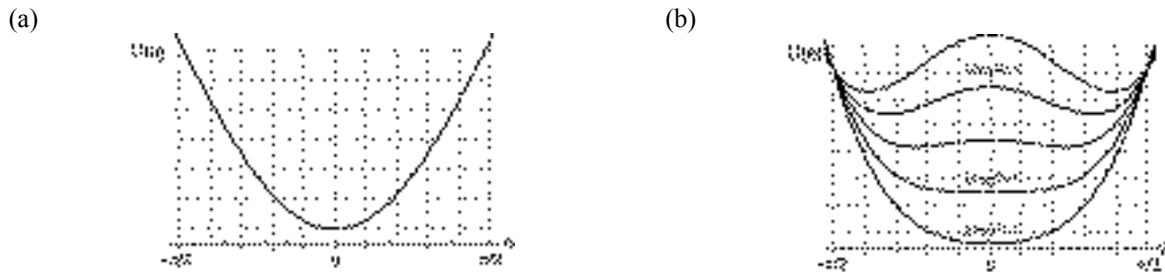


Fig. 2. Andamento dell'energia potenziale nel caso di pendolo di torsione tradizionale (a) e nel caso di pendolo di torsione invertito (b).

Nel caso del pendolo di torsione tradizionale la sola posizione di equilibrio stabile è ad angolo zero. Nel caso del pendolo di torsione invertito invece dobbiamo considerare due possibilità. Se il rapporto k/mgR è maggiore di 1 c'è un solo equilibrio stabile ad angolo zero. Ma se $k/mgR < 1$ l'equilibrio ad angolo zero è instabile, ed esistono due angoli θ_{\pm} simmetrici diversi da zero di equilibrio stabile.

$$\theta_{\pm} = \pm \sqrt{6 \left(1 - \frac{k}{mgR} \right)} \quad (4)$$

4. Dipendenza del periodo dall'ampiezza e risposta ad eccitazione sinusoidale

Quando la non-linearità è piccola le armoniche d'ordine elevato possono essere trascurate e si può cercare una soluzione tipo moto armonico. Con questa assunzione possiamo calcolare la dipendenza del periodo dall'ampiezza (Fig. 3) e la risposta ad una eccitazione sinusoidale (Fig. 5).

Nell'approssimazione al primo ordine in ω la dipendenza del periodo dall'ampiezza è data da:

$$\omega^2 = \alpha + \frac{3}{4} \beta A^2, \tag{5}$$

dove ω è la pulsazione.

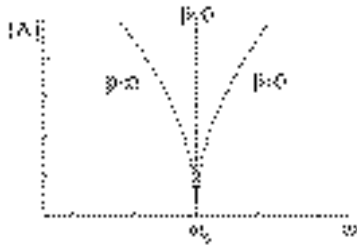


Fig. 3. Diagramma A(ω) dell'oscillatore di Duffing libero. La linea tratteggiata rappresenta l'oscillatore armonico.

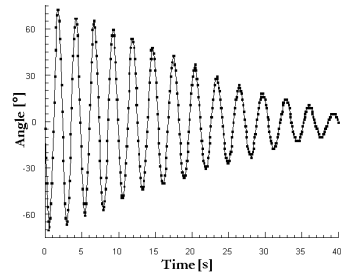


Fig. 4. Una misura sperimentale delle oscillazioni libere del pendolo torsionale invertito (>0)..

La variazione del periodo con l'ampiezza è particolarmente evidente nel caso del pendolo invertito dove il periodo cresce quando l'oscillazione si smorza (Fig. 4).

Per calcolare la risposta del pendolo forzato si usa spesso il metodo iterativo di Duffing. Il risultato può essere scritto in forma implicita come:

$$F^2 = (\alpha - \omega^2)A + \frac{3}{4} \beta A^3 + c^2 \omega^2 A^2 \tag{6}$$

e lo sfasamento ϕ è dato da

$$\tan \phi = \frac{c\omega}{\alpha - \omega^2 + 3/4 \beta A^2}. \tag{7}$$

Il diagramma di risposta mostra il fenomeno dell'isteresi. C'è una regione nel diagramma dove sono possibili due diversi stati del sistema. Lo stato in cui si trova realmente il sistema ad un certo istante dipende dalle condizioni iniziali o dal valore della frequenza negli istanti precedenti. (Fig. 5) Quando la frequenza forzante cresce lentamente l'ampiezza e lo sfasamento compiono un salto dal punto 1 al punto 2 del diagramma, ma quando la frequenza invece decresce i salti avvengono dal punto 3 al punto 4. Per vedere l'effetto si deve attendere che termini il regime transiente delle oscillazioni. Questo modello trova conferma nell'andamento dei dati sperimentali (Fig. 6).

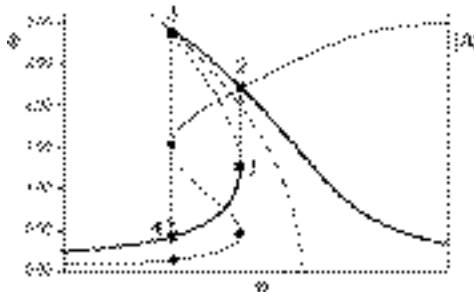


Fig. 5. L'isteresi di ampiezza e fase per <0 . La tratteggiata rappresenta le oscillazioni libere

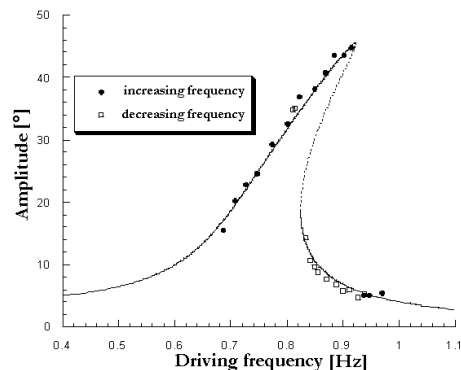


Fig. 6. Dati sperimentali (ampiezza) per il pendolo invertito (>0).

5. Il sistema di interfacciamento con CBL e TI89.

I dati mostrati in figura 6 sono stati acquisiti utilizzando due sensori di rotazione connessi a CBL.

Il sensore per registrare l'angolo della leva forzante è costituito da un potenziometro, il cui asse è reso solidale con l'asse di rotazione e il cui cursore fornisce il segnale analogico proporzionale all'angolo di rotazione; il sensore per misurare l'angolo dell'asta oscillante è uno speciale sensore ottico non commerciale[10] ma si può ugualmente bene usare un normale encoder.

Le prime prove erano state eseguite con un sensore potenziometrico per misurare l'angolo della forzante ed un sonar per misurare a posizione dell'asta, ed usando un software appositamente scritto a questo scopo[8] per TI 89/92 per convertire posizione in angolo. Alcuni dei risultati sono riportati in figura 7 a e 7b.

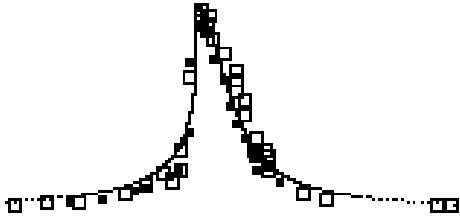


Fig. 7a: Esempio di dati acquisiti con <0 , interpolati con la curva teorica su TI-89.



Fig. 7b: Esempio di dati acquisiti con >0 , interpolati con la curva teorica su TI-89.

6. La transizione al caos nel pendolo torsionale invertito

La complessità della risposta cresce con la non-linearità. Ciò è particolarmente evidente nel caso (>0). L'equilibrio instabile ad angolo zero induce nel sistema la debole causalità che porta al moto caotico. Per alcune combinazioni di valori dei parametri α , β , c , F , ω non c'è periodicità e ordine nell'oscillazione risultante. Fissati i parametri α e β determinati dalle dimensioni del pendolo si può cambiare lo smorzamento c , l'ampiezza F o la frequenza ω per entrare nella regione caotica.

Tuttavia la transizione al caos è graduale. La biforcazione di orbite stabili segue lo scenario di Feigenbaum del "period doubling" portando infine al moto caotico.

Con questo apparato didattico si può variare qualsiasi parametro per studiare la transizione al caos [4], ma il modo più semplice è calare lentamente la frequenza che è determinata dalla tensione applicata al motore. A frequenze relativamente alte la risposta ha periodicità semplice ("Periodo 1": Fig. 8). Calando gradualmente la frequenza il moto diventa instabile, e nello spazio delle fasi la traiettoria è attratta da due orbite stabili che si intersecano. Ad ogni ciclo della forzante il moto cambia orbita. In questo caso la risposta si ripete ogni due cicli (moto a "periodo 2" : Fig. 9). Analoga biforcazione poi avviene con raddoppiamento del periodo da 2 a 4 (Fig. 10) al successivo calare della frequenza. Gli intervalli della frequenza forzante da un raddoppiamento del periodo ad un altro decrescono geometricamente e portano alla fine al moto caotico (Fig. 11).

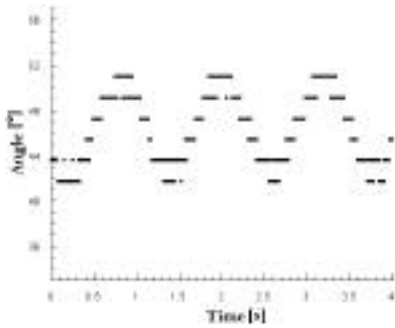


Fig. 8. Periodo1 (frequenza =0,83 Hz).

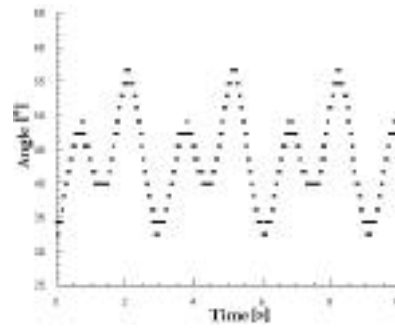


Fig. 9. Periodo 2 (frequenza =0,63 Hz).

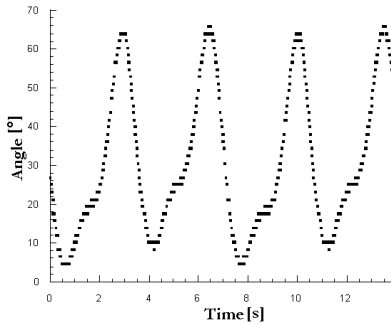


Fig. 9. Periodo 4 (frequenza =0.56 Hz).

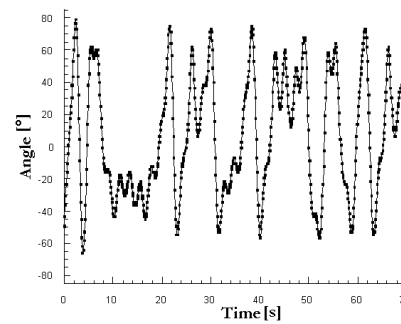


Fig. 10. Moto caotico (frequenza =0.47 Hz)

7. Conclusioni

Questo prototipo di apparato sperimentale consente un immediato confronto tra previsioni teoriche e dati sperimentali. Le grandi dimensioni producono un moto lento e transizioni chiaramente osservabili sia in fase che in ampiezza, che permettono di riconoscere “a vista” l’instabilità delle orbite periodiche e la transizione al regime caotico, rendendo possibile uno studio anche qualitativo del fenomeno . Tuttavia per un uso didattico in classe che consenta più rapidi esperimenti quantitativi le dimensioni dovrebbero essere ridotte.

8. Bibliografia

- [1] B. Duchesne, C. W. Fischer, C. G. Gray, K. R. Jeffrey, "Chaos in the motion of an inverted pendulum: An undergraduate laboratory experiment", *Am. J. Phys.*, **59** (1991), 987-992
- [2] C. L. Olson, M. G. Olsson, "Dynamical symmetry breaking and chaos in Duffing's equation", *Am. J. Phys.*, **59** (1991), 907-911
- [3] R. D. Peters, "Chaotic pendulum based on torsion and gravity in opposition", *Am. J. Phys.*, **63** (1995), 1128-1136
- [4] H. J. Korsch, *Chaos-a program collection for the PC* (Springer-Verlag, 1994)
- [5] Internet pages for non-linear systems with simulations:
["www.mcasco.com/pattr1.html"](http://www.mcasco.com/pattr1.html), ["www.apmaths.uwo.ca/~bfraser/version1/index.html"](http://www.apmaths.uwo.ca/~bfraser/version1/index.html),
["www.chaos.engr.utk.edu.html"](http://www.chaos.engr.utk.edu.html), ["http://monet.physik.unibas.ch/~elmer/pendulum/bif.htm"](http://monet.physik.unibas.ch/~elmer/pendulum/bif.htm)
- [6] B. K. Jones, G. Trefan, "The Duffing oscillator: A precise electronic analog chaos demonstrator for the undergraduate laboratory", *Am. J. Phys.*, **69** (2001), 464-469
- [7] E. Milotti, "Non linear behavior in a torsion pendulum ", *Eur. J. Phys.* **22** (2001), 239-248
- [8] S. Lasic, The thesis work: "Didactical treatment of torsion pendulum with the transition to chaos", University of Ljubljana, Faculty for Mathematics and Physics, 2001
- [9] J. J. Stoker, *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems* (Interscience Publishers, 1950)
- [10] D. Ponivkar, *Contactless angle measurements* Rev. Sci. Instrum 70/4 (1999), 628-629