

Corso IRRSAE- L'Aquila 9-10 aprile 1999

Oscillazioni armoniche ed anarmoniche

Giacomo Torzo

Dipartimento di Fisica, Università di Padova

Barbara Pecori

Dipartimento di Fisica, Università di Bologna

Presentazione del lavoro del Corso

Uno degli argomenti in didattica della fisica che possono trarre un grande vantaggio dall'essere studiati con sistemi di acquisizione on-line (e in particolare con il sistema CBL e calcolatrici grafiche) è la meccanica dei moti oscillatori.

Questo perché in un moto oscillatorio è assai importante cogliere *l'evoluzione temporale* del fenomeno, e il poter analizzare i grafici di posizione, velocità e accelerazione verso il tempo spesso permette una valutazione immediata delle caratteristiche essenziali del particolare tipo di oscillazione.

Anche l'analisi dei dati sperimentali in rappresentazioni grafiche meno diffuse in ambito scolastico (velocità verso posizione, accelerazione verso posizione, forza verso accelerazione, forza verso posizione...) può offrire spunti preziosi per approfondire nello studente la comprensione del fenomeno in esame.

Il sistema sensore-interfaccia-elaboratore consente cioè di *estendere le potenzialità dell'occhio e della memoria* dello studente che osserva il fenomeno, offrendo, da un lato una registrazione permanente dei dati sperimentali per una successiva rielaborazione (anche lontano dal laboratorio, ove il fenomeno non è più disponibile), dall'altro la possibilità di caratterizzare immediatamente in modo *qualitativo* il sistema in esame, individuando dalla forma del grafico relazioni interessanti tra le variabili caratteristiche del fenomeno.

Infine la disponibilità dei dati sperimentali nella loro interezza consente di procedere successivamente ad una analisi *quantitativa* e non più solo *qualitativa*.

Prenderemo rapidamente in esame i due sistemi oscillanti che fanno parte del normale programma in tutti i corsi introduttivi di meccanica (oscillatore massa-molla e pendolo), ed un sistema oscillante (la macchina di Atwood con una massa in acqua) raramente studiato ma che bene si presta ad illustrare la transizione dal comportamento *anarmonico* a quello *armonico*, un aspetto che nel tradizionale laboratorio viene di solito trascurato.

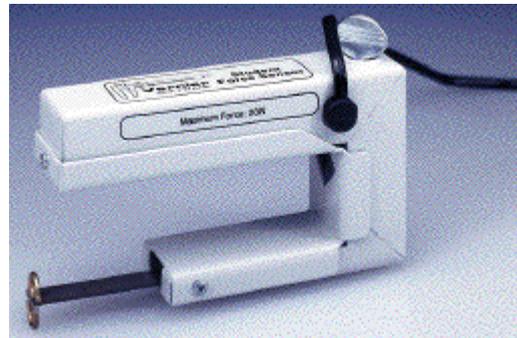
Nel caso dell'oscillatore massa-molla, se la molla obbedisce alla legge di Hooke, il sistema è sempre rigorosamente *armonico* (forza di richiamo proporzionale allo spostamento), nel caso dell'oscillatore di Atwood il moto *anarmonico* diventa *armonico* alle piccole ampiezze (la forza di richiamo data dalla spinta di Archimede e dal campo gravitazionale, passa da un valore costante ad uno proporzionale allo spostamento quando il corpo resta sempre parzialmente immerso) e, nel caso del pendolo (oscillatore *intrinsecamente anarmonico*) gli effetti di anarmonicità *possono essere trascurati* a piccole ampiezze.

Concluderemo con una analisi più dettagliata di un altro oscillatore che, anche se ben noto ad insegnanti e studenti, raramente diventa oggetto di studio nella scuola (*l'altalena* nelle sue due configurazioni elementari) per evidenziare *aspetti comuni a fenomeni apparentemente molto diversi, e differenze importanti in fenomeni apparentemente assai simili*.

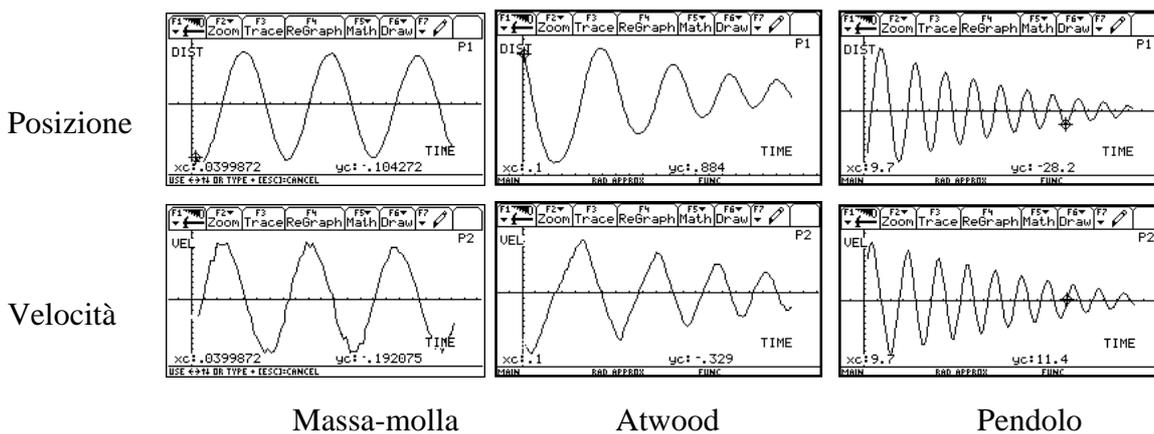
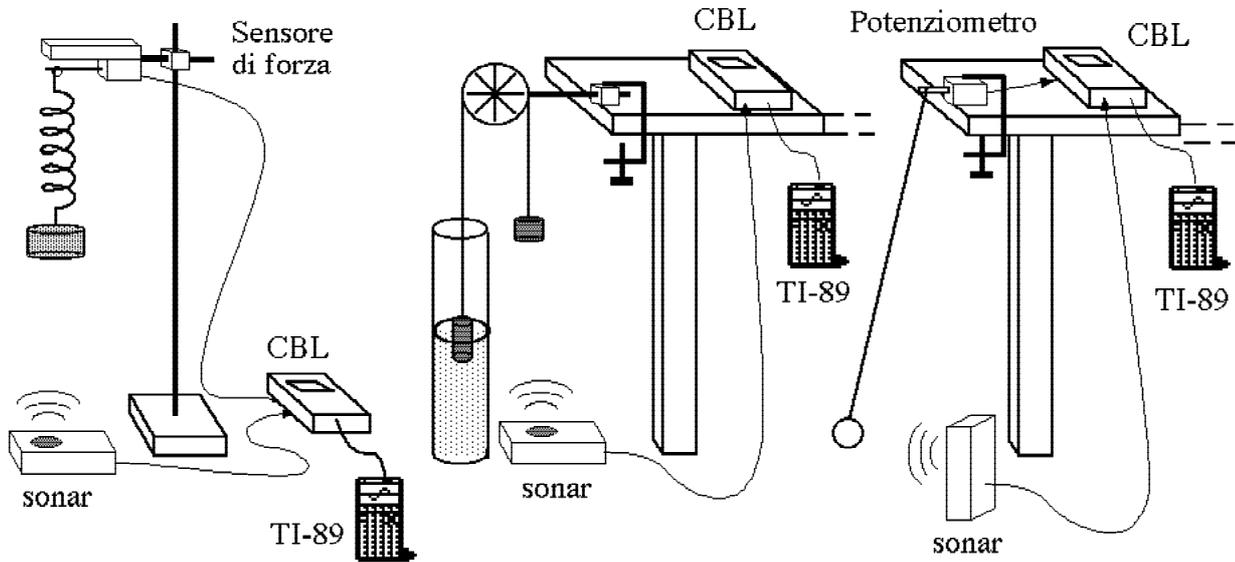
Verranno infine mostrati altri semplici apparati adatti alla esecuzione in classe di esperimenti su moti oscillatori (pallina che rimbalza, carrello e molla su piano inclinato, sfera su doppio piano inclinato, ruota di Maxwell e yo-yo) sui quali saranno forniti alcuni suggerimenti utili e informazioni pratiche.

Questa serie di esperimenti non pretende di costituire un pacchetto didattico pronto all'uso sul tema delle oscillazioni: vuole piuttosto essere un sintetico esempio delle grandi potenzialità offerte dalle nuove tecnologie per l'insegnamento della fisica sperimentale e una raccolta di possibili esperimenti dai quali l'insegnante possa attingere per costruire un proprio percorso didattico.

Gli strumenti del laboratorio on-line



Un esempio di confronto fra oscillatori



I grafici $x(t)$ si assomigliano abbastanza: a prima vista sembrano tutti delle sinusoidi più o meno smorzate.

Dai grafici $v(t)$ risulta invece evidente la differenza fra i tre oscillatori, e la differenza si nota ancor più nei grafici $a(t)$.

Per l'oscillatore armonico (massa-molla) l'andamento della velocità segue quello della posizione, solo con uno sfasamento di 90° , invece per l'oscillatore di Atwood il grafico della velocità, a grandi ampiezze, è composto da segmenti rettilinei, rivelando subito che in ciascun tratto il moto è uniformemente accelerato, con accelerazione che cambia segno ogni semiperiodo, mentre per piccole oscillazioni assomiglia a quello della molla.. Anche l'oscillazione a grande ampiezza di un pendolo è tutt'altro che sinusoidale: non lo si nota nel grafico $x(t)$, ma lo si vede bene in quello di $v(t)$.

E' evidente che proprio la disponibilità dei dati sperimentali nella loro interezza, e non solo in particolari istanti (ad esempio quelli relativi al passaggio attraverso traguardi, come nel laboratorio tradizionale) consente questa analisi (qualitativa ma importante) a colpo d'occhio.

E' possibile quindi, a partire da questa prima analisi, mettere in evidenza come l'*approssimazione armonica a piccole ampiezze* sia, da un lato estremamente utile per semplificare la trattazione matematica, ma dall'altro inadeguata a spiegare dettagliatamente il comportamento di alcuni fenomeni.

La caratteristica di armonicità implica l'*isocronismo*. Una analisi quantitativa dei grafici permette di realizzare facilmente uno studio dell'andamento del periodo in funzione dell'ampiezza.

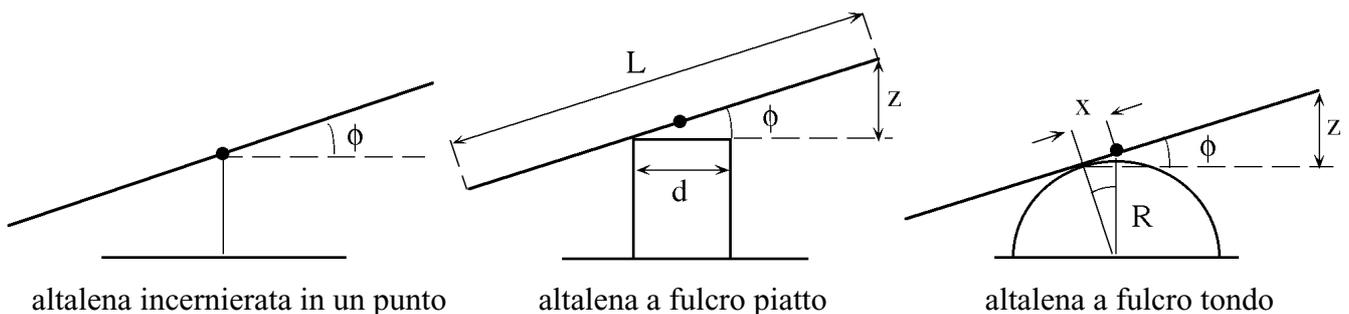
Questo tipo di approccio permette inoltre di variare in sequenza diversi parametri nell'esperimento allestito e di osservare immediatamente le conseguenze nel moto risultante.

Successivamente si può altrettanto agevolmente controllare l'accordo o il disaccordo tra dati sperimentali e previsioni formulate sulla base di modelli fisici del fenomeno studiato, ed eventualmente su questa base rivedere il modello usato.

Un esempio di studio del moto dell'altalena

Il termine *altalena* in italiano viene usato per oggetti diversi: c'è l'altalena a fune (strutturalmente un pendolo) c'è l'altalena a barra incernierata ad un fulcro fisso (quella che spesso si trova nel parco-giochi) e poi ci sono le altalene "artigianali" che chiunque si può costruire con una barra poggiata su un sostegno fisso.

Chi ha avuto occasione di giocare con una altalena fatta di un'asse in bilico su un sostegno fisso può aver notato che l'altalena "funziona meglio" quando il sostegno è *piatto* (ad esempio un muro basso di una casa in costruzione) ed è invece meno divertente se il fulcro adoperato è tondo e *sottile* (come ad esempio la barra di una ringhiera), nel qual caso l'altalena si comporta in modo simile a quella del parco-giochi. Questo diverso comportamento si può spiegare se si studia in dettaglio la dinamica dei due sistemi, che si rivelano essere diversi in modo *sostanziale*.

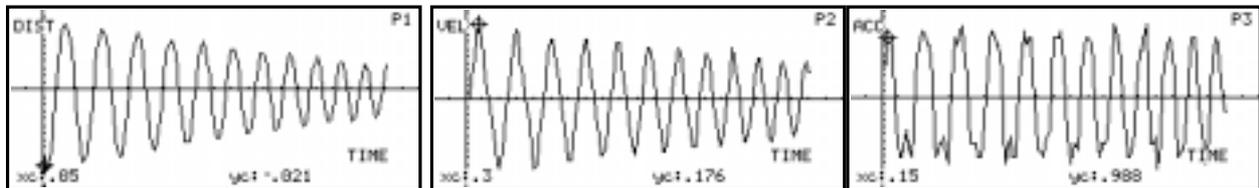


Usando CBL per studiare il moto di due modelli in scala ridotta rispettivamente della altalena su sostegno piatto e della altalena su sostegno tondo vedremo che il primo è un moto anarmonico e il secondo è un moto armonico.

Descrizione delle fasi dello studio

Studiamo innanzitutto *il moto di una sbarra che oscilla su supporto piatto*.

Lo studio può iniziare con una osservazione qualitativa dei grafici che si ottengono rilevando la posizione dell'estremo della sbarra in funzione del tempo $z(t)$ e delle due derivate successive $v(t)$ e $a(t)$. Un esempio di dati acquisiti ($L=50\text{cm}$, $m=120\text{g}$, $d=2\text{cm}$) è il seguente:

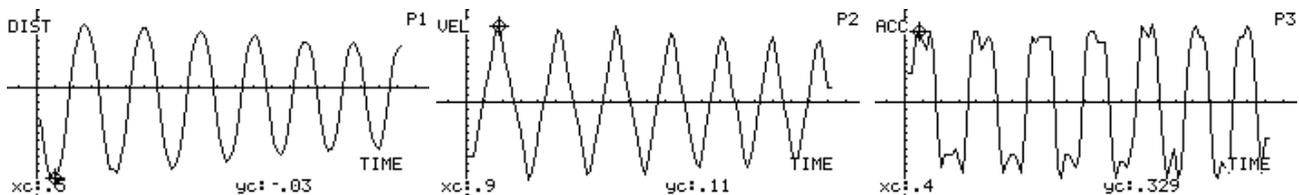


Dai grafici $v(t)$ e $a(t)$ possiamo subito vedere che *il moto non è armonico*, ma presumibilmente a forza costante.

Per avere ulteriori informazioni *possiamo provare a variare alcuni parametri*.

Se variamo la massa a parità di lunghezza (ad esempio usando una sbarra doppia) otteniamo grafici praticamente identici che indicano *l'indipendenza delle caratteristiche del moto dalla massa della sbarra*.

Caricando invece la sbarra agli estremi (con due masse uguali $M=0.5\text{ kg}$) possiamo vedere una netta variazione del periodo medio di oscillazione e del valore dell'accelerazione, pur rimanendo invariata la forma dei grafici che si ottengono. Questo indica che *la distribuzione della massa* (cioè il momento di inerzia) *è un parametro importante* nel determinare la dinamica del sistema.



Per passare ad uno studio quantitativo *è necessario formulare un modello* che permetta di esprimere analiticamente la dipendenza di una variabile caratteristica del moto (ad esempio l'accelerazione o il periodo) dai parametri individuati come significativi.

Un modo per schematizzare la dinamica del sistema è di considerare la sbarra come un corpo rigido che compie in successione movimenti di rotazione in senso orario e antiorario attorno a due assi fissi (i due spigoli del blocco su cui la sbarra è poggiata all'equilibrio). Allora basta prendere in considerazione il moto del baricentro, il momento di inerzia I della sbarra e le forze agenti. Nel momento in cui si lascia libero l'estremo della sbarra il baricentro inizia a cadere sotto la spinta della forza di gravità, ma resta vincolato alla distanza $d/2$ dallo spigolo di appoggio che funge da asse di rotazione. L'equazione del moto è subito fornita dalla relazione $I d\omega/dt = \Gamma$, ove $\Gamma = (d/2)mg\cos\varphi$ è il momento torcente e ω a velocità angolare.

Se la sbarra è sufficientemente piatta il suo momento di inerzia rispetto all'asse orizzontale per il baricentro è $I_0 = 2 \int_0^{L/2} x^2 \mu dx = mL^2/12$, ove $\mu = m/L$ è la massa per unità di lunghezza della sbarra. E il

momento di inerzia I_r rispetto ad un asse parallelo che dista $r=d/2$ dal baricentro è fornito dal teorema di Steiner: $I_r = I_0 + mr^2$. Con $r=d/2$ si ha $I = (m/3)(L/2)^2(1+3d^2/L^2)$.

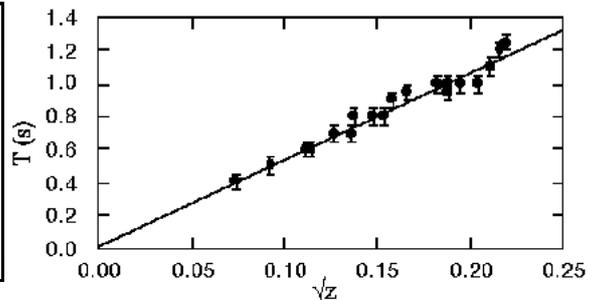
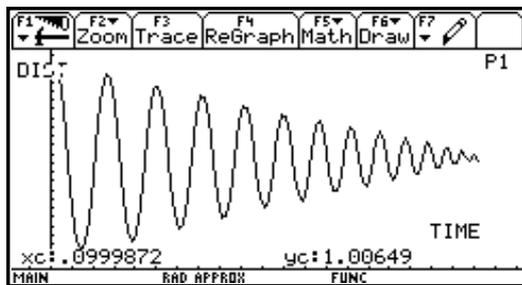
Una schematizzazione della dinamica nell'approssimazione di piccoli angoli (e per $L \gg d$) fornisce per la componente verticale dell'accelerazione dell'estremo della barra il valore costante $a=3gd/L$.

Se la barra è caricata con due masse uguali M agli estremi, il momento torcente applicato al baricentro, vale $\Gamma = (d/2)(m+2M)g \cos \phi$, e il momento di inerzia diventa $I = \{(m/3)(1+3d^2/L^2) + 2M(1+d^2/L^2)\}(L/2)^2$

Nel caso sia $M \gg m$ e $L \gg d$ la componente verticale dell'accelerazione dell'estremo della barra a piccoli angoli diventa $a=gd/L$.

Un **primo controllo sperimentale del modello** può essere effettuato confrontando l'accelerazione della sola sbarra con quella della sbarra caricata agli estremi. I valori sperimentali indicano che effettivamente in questo secondo caso **l'accelerazione risulta ridotta di un terzo**.

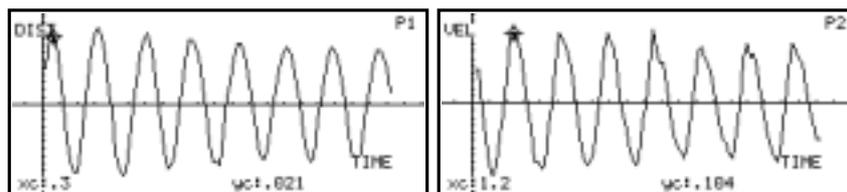
Un **secondo controllo sperimentale** può essere effettuato studiando l'andamento del periodo in funzione dell'ampiezza. La previsione teorica è che, nei limiti della schematizzazione effettuata, sia $T \approx 4\sqrt{2zL/3gd}$ e i dati sperimentali (ricavati misurando sul grafico i valori del periodo per diversi valori dello spostamento) mostrano effettivamente un andamento del **periodo direttamente proporzionale a \sqrt{z}** .



Il modello finora sviluppato prevede ovviamente che **se d tende a zero il periodo T tende all'infinito**, condizione che corrisponde a quella dell'altalena incernierata al centro.

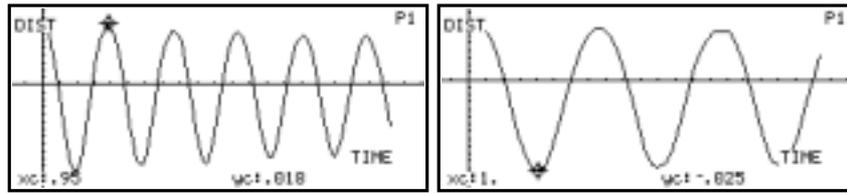
Che cosa succede invece **se realizziamo una situazione con $d=0$ utilizzando un fulcro tondo** ?

Riportiamo di seguito una acquisizione dei dati nel caso di una **sbarra che oscilla su un supporto tondo** ($L=50$ cm, $R=5$ cm, $m=120$ g):



In questo caso **T non sembra dipendere dall'ampiezza**. Inoltre se proviamo a variare alcuni parametri possiamo vedere che:

- il moto risulta **indipendente dalla massa della sbarra**;
- il periodo diminuisce al crescere del raggio di curvatura** del fulcro;
- caricando la sbarra agli estremi il periodo aumenta**.



R=10 cm m=120g M=0

R=10 cm m=120g M=1000g

E' necessario quindi **formulare un nuovo modello teorico**, che dovrà tener conto del fatto che sia il momento torcente sia il momento d'inerzia dipendono dall'angolo.

Lo spostamento del punto di appoggio (lungo la barra) in tal caso vale $x=R\phi$, e il momento della forza agente sul baricentro è $x mg \cos\phi$, ove anche il braccio della forza $x(\phi)$ dipende dall'angolo, e adesso anche il momento di inerzia è variabile: I dipende da x , e quindi da ϕ : $I(x)=(m/12)L^2+mx^2$ (dal teorema di Steiner).

La relazione teorica che, nell'approssimazione di piccoli angoli, lega accelerazione angolare α ad angolo di inclinazione ϕ è: $\alpha \approx -12gR/L^2\phi$: si riconoscerà la classica equazione del pendolo, con periodo $T=\pi L / \sqrt{3gR}$

L'oscillazione con la barra appesantita agli estremi ha accelerazione angolare $\alpha \approx -4gR/L^2 \phi$, ridotta di un terzo rispetto al caso di barra scarica, e il periodo previsto per piccole oscillazioni diventa $T= \pi L / \sqrt{gR}$ ovvero maggiore di un fattore $\sqrt{3}$ rispetto all'altalena scarica.

I risultati sperimentali confermano questo modello: effettivamente abbiamo realizzato un moto quasi armonico che per piccole oscillazioni si comporta come quello di un pendolo.

L'utilizzazione di un sistema di acquisizione semplice ma potente, come quello costituito da una calcolatrice grafica interfacciata con un sensore di moto, ci ha permesso di condurre uno studio del fenomeno non solo qualitativo ma anche quantitativo.