

# Il moto dell'altalena: un gioco antico studiato con tecnica moderna

Giacomo Torzo

*Dipartimento di Fisica, Università di Padova*

Barbara Pecori

*Dipartimento di Fisica, Università di Bologna*

## Riassunto

Si studia il moto di una altalena costituita da una barra oscillante mediante un sistema di acquisizione dati on-line con un sensore di distanza. Si analizzano due casi: doppio fulcro e fulcro tondo. Si discutono i due diversi comportamenti e si elaborano semplici modelli per prevedere l'andamento del periodo di oscillazione in funzione dell'ampiezza e dei parametri geometrici del sistema. Viene discusso il ruolo che lo studio di moti armonici e anarmonici può svolgere nell'insegnamento della fisica.

## Abstract

The see-saw motion is investigated using on-line data acquisition system made of TI89, CBL, and a motion sensor (sonar). Two cases are considered: the twin-edges pivot and the round pivot. We discuss the different behaviours that lead to strongly anharmonic or nearly harmonic motions. Simple models are presented that predict the dependence of the oscillation period from the amplitude and from the geometric parameters. The relevance of the investigation of oscillatory motions in physics teaching is discussed.

## Introduzione

Chi, tra gli insegnanti oggi in servizio, è stato bambino negli anni '50, avrà probabilmente avuto occasione (allora non esistevano videogiochi e si stava molto all'aperto) di giocare con una altalena fatta di un'asse in bilico su un sostegno fisso. A noi è capitato più di una volta, e ricordiamo di aver notato che l'altalena era più divertente quando il sostegno era *piatto*, come appunto un muro basso di una casa in costruzione (allora le norme di sicurezza erano meno rigorose, e la domenica era facile entrare nei cantieri per giocare), e invece lo era meno se il fulcro adoperato era *sottile e rotondo* (come ad esempio la barra di una ringhiera).

Questo diverso comportamento<sup>1</sup> si può spiegare se si analizza in dettaglio la dinamica dei due sistemi, che si rivelano essere diversi in modo *sostanziale*. Il confronto dei due sistemi può rappresentare una occasione per approfondire lo studio del moto di oscillatori armonici e anarmonici.

## Il moto dell'altalena percepito “a occhio” e “a orecchio”

Se si osserva il moto di una qualsiasi barra posta in equilibrio sopra un sostegno piatto l'occhio

---

<sup>1</sup> L'idea di analizzare questo sistema ci è stata suggerita da un lavoro di Russell Akridge apparso su *The Phys. Teach.* 36, 507 (1998)

percepisce una oscillazione regolare, che sembra essere grossolanamente isocrona.

Il periodo di oscillazione, se si prova con barre di diversa lunghezza e con fulcri *piatti* di diverso spessore, risulta crescere al crescere della lunghezza della barra e al diminuire dello spessore del fulcro.

Se si presta attenzione al suono prodotto dalla barra ogni volta che essa attraversa la posizione orizzontale (ad esempio chiudendo gli occhi), si noter  immediatamente che il periodo cala al diminuire dell'ampiezza di oscillazione: "ad orecchio" la sequenza di colpi assomiglia a quella prodotta da una pallina che rimbalza.

Se si pone la stessa barra sopra un fulcro *tondo* si perde l'informazione acustica e alla vista l'oscillazione sembra essere all'incirca dello stesso tipo. Con il tendere a zero del raggio del fulcro, il periodo sembra tendere all'infinito, in modo simile a quanto avviene quando si fa tendere a zero la distanza dei due fulcri nell'altalena su sostegno piatto.

Il caso limite in cui i due sistemi coincidono   quello della altalena del parco-giochi, cio  l'altalena incernierata ad un asse (equivalente ad un fulcro a lama, cio  un doppio fulcro di spessore zero o un fulcro tondo di raggio zero), che   un sistema in equilibrio indifferente e quindi non oscilla, ovvero il suo periodo   infinito.

## Dall'osservazione qualitativa alla misura

Se si utilizza un sistema di acquisizione dati on-line, con un sonar che pu  fornire una fitta sequenza di valori di posizione, velocit  e accelerazione di un estremo della barra in funzione del tempo, si pu  facilmente ottenere una rappresentazione grafica del moto, che pu  quindi essere analizzato in maggiore dettaglio, dal punto di vista sia qualitativo sia quantitativo.

A questo scopo abbiamo utilizzato un modellino di altalena il cui comportamento pu  essere studiato in laboratorio in condizioni controllate, costituito da una barra poggiata su un parallelepipedo in alluminio posto sul bordo di un tavolo (si pu  anche usare una lunga riga da disegno in plastica e un mattone)

I risultati riportati in seguito sono stati ottenuti in laboratorio usando una calcolatrice grafica TI89 o TI92, una interfaccia CBL e un sensore di distanza<sup>2</sup> che, poggiato a terra, ha come bersaglio l'estremo della barra sporgente dal tavolo.

## Il caso del doppio fulcro

Sia data una barra omogenea lunga  $L$ , poggiata simmetricamente su un parallelepipedo fisso come in figura 1, e sia  $d$  la dimensione del parallelepipedo lungo la direzione dell'asse maggiore della barra.

---

<sup>2</sup> Per informazioni su questo sistema di misura si pu  consultare la pagina web <http://www.ti.com/calc/docs/cbl.htm>; gli stessi risultati tuttavia si possono ottenere con altri sistemi (Pasco, Vernier, Coach...)

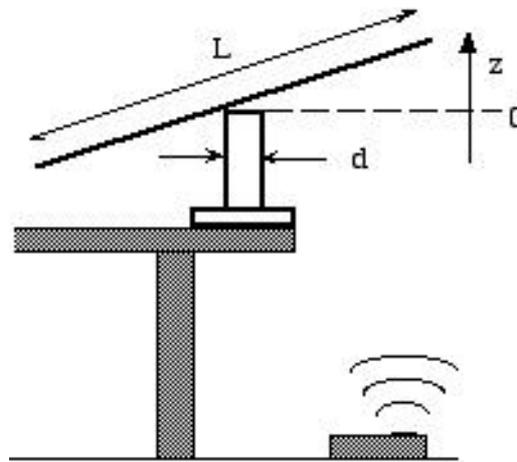


Figura 1

Quando un estremo della barra viene leggermente sollevato (ad un dislivello  $z_0$  rispetto alla posizione di equilibrio) e poi lasciato libero, la barra inizia ad oscillare compiendo un moto smorzato fino a tornare a riposo nella posizione di simmetria iniziale (mezza oscillazione si compie attorno allo spigolo sinistro del parallelepipedo, e la mezza successiva attorno allo spigolo destro).

### 1.1 Caratteristiche del moto rilevabili qualitativamente dai grafici

Se si registra l'elongazione  $z$  in funzione del tempo<sup>3</sup> si può fare subito qualche osservazione. Come esempio in figura 2 è riportata la registrazione della elongazione  $z(t)$  per una barra di alluminio con  $L=80\text{cm}$  e per una distanza tra i due fulcri  $d=4\text{cm}$  (dopo aver azzerato la lettura del sensore di distanza in condizioni di barra in equilibrio). In figura 2 gli stessi dati sono riportati sia come vengono mostrati sul display della calcolatrice sia come possono essere rielaborati su PC con Graphical Analysis, un software capace di importare direttamente i file di dati prodotti dalle calcolatrici grafiche tascabili.

Facciamo notare qui che in tutti i grafici prodotti da questo tipo di calcolatrici non appaiono le scale degli assi coordinati, e di conseguenza neppure le unità di misura usate nel tracciare la curva: ciò è dovuto al poco spazio disponibile nel display LCD. Tuttavia, spostando con il tasto cursore il puntatore a croce lungo la curva tracciata, appaiono in basso i valori delle coordinate ( $x_c$  e  $y_c$ ) del punto su cui è posizionato il puntatore. Ciò sostituisce l'operazione che si esegue nell'analizzare un grafico tradizionale proiettando sugli assi i punti della curva per ricavarne i valori delle coordinate. Ove non specificato diversamente, le unità di misura sono quelle del sistema MKS, ed i grafici sono esattamente ciò che appare sulle schermate della calcolatrice.

<sup>3</sup> Ciò che il sonar misura è in realtà la distanza dell'estremo della barra che riflette l'impulso sonoro, e quindi se si desidera ottenere un grafico dell'elongazione si dovrà innanzitutto "azzerare" il segnale quando la barra è in posizione di equilibrio. Per i dettagli tecnici si rimanda al riferimento della nota 2.

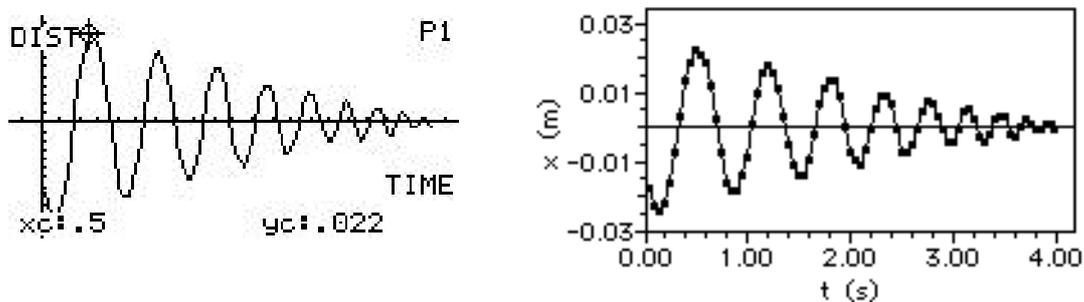


Figura 2 : Spostamento verticale dell'estremità della barra in funzione del tempo ( $d=4$  cm,  $L=80$ cm).

A prima vista (specialmente se  $d \ll L$  e  $z \ll L$ ) il grafico può sembrare quello di una semplice oscillazione armonica smorzata. Se si diminuisce lo spessore  $d$  del fulcro (ad esempio passando a  $d=1$ cm) si osserva che, a parità di ampiezza di oscillazione, il periodo è maggiore, e lo smorzamento è minore (figura 3); della dipendenza dello smorzamento da  $d$  parleremo più avanti (§ 4).

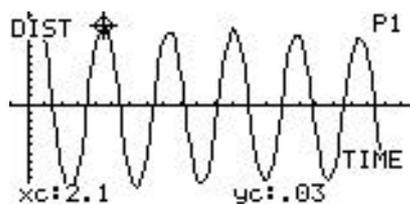


Figura 3: Spostamento verticale dell'estremità della barra in funzione del tempo ( $d=1$ cm)

Se osserviamo invece l'andamento della velocità e dell'accelerazione in funzione del tempo ci appare subito che non si tratta affatto di un moto armonico (per il quale velocità e accelerazione dovrebbero essere ancora funzioni sinusoidali), ma piuttosto di un moto in cui l'accelerazione cambia bruscamente di segno passando da un valore positivo ad uno negativo e viceversa (praticamente uguali in modulo).

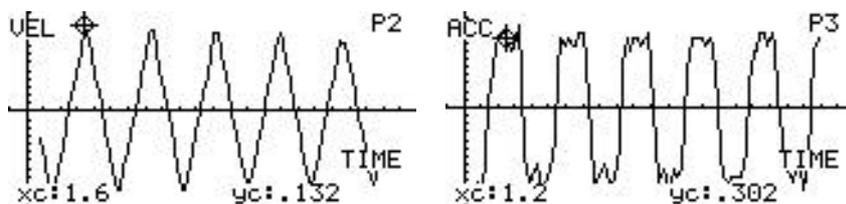


Figura 4 : Velocità e accelerazione dell'estremità della barra in funzione del tempo ( $d=1$ cm)

## 1.2 Come arrivare ad una descrizione analitica del moto

Anche una semplice riflessione sulla dinamica del sistema ci dice che il moto della barra non può essere armonico, dato che non c'è qui la caratteristica essenziale dei moti armonici, e cioè una qualche *forza di richiamo proporzionale allo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio*.

Un modo per schematizzare la dinamica del sistema è considerare la barra come un corpo rigido che compie in successione movimenti di rotazione in senso orario e antiorario attorno a due assi fissi (i due spigoli del blocco su cui la barra è poggiata all'equilibrio).

La forza di gravità può essere pensata agire solo sul baricentro, mentre la reazione vincolare del blocco agisce sullo spigolo ove avviene il contatto. Si può allora assumere un sistema di riferimento bidimensionale  $x,z$  (il piano di simmetria verticale passante per l'asse maggiore della barra), ad esempio con l'asse  $z$  diretto verso l'alto e l'asse  $x$  orizzontale.

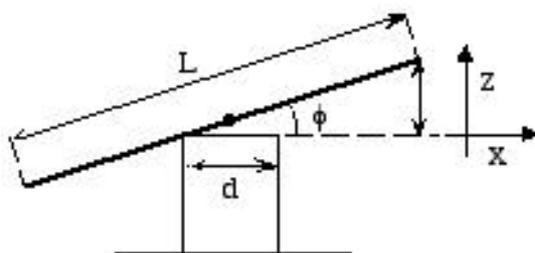


Figura 5

Nel momento in cui si lascia libero l'estremo della barra, sollevato rispetto alla posizione di equilibrio, il baricentro inizia a cadere sotto l'azione della forza di gravità, restando vincolato (se l'inclinazione iniziale è sufficientemente piccola da evitare scivolamento) alla distanza  $d/2$  dallo spigolo di appoggio che funge da asse di rotazione.

Detta  $\dot{\phi}$  la velocità angolare di rotazione ( $\dot{\phi} = d\phi/dt$ , ove  $\phi$  è l'angolo di inclinazione sulla orizzontale), anche l'estremo della barra che si trova più in alto ruota con velocità angolare  $\dot{\phi}$ , mantenendo la distanza  $L/2 + d/2$  dall'asse.

L'equazione del moto è fornita dalla relazione  $I \ddot{\phi} = Mgd \sin \phi$ , ove  $M$  è il momento torcente.

Se la barra è sufficientemente piatta (spessore  $s \ll L$ ) il suo momento di inerzia rispetto all'asse orizzontale per il baricentro è facile da calcolare tramite la relazione  $I_0 = 2 \int_0^{L/2} x^2 \mu dx = mL^2/12$ , ove  $\mu = m/L$  è la massa per unità di lunghezza della barra.

Il momento di inerzia  $I$  rispetto ad un asse parallelo che dista  $r = d/2$  dal baricentro è fornito dal teorema di Steiner:  $I = I_0 + mr^2$ . Con  $r = d/2$  si ha  $I = (m/3)(L/2)^2(1 + 3d^2/L^2)$ .

Per calcolare  $\dot{\phi}$  basta pensare che per ogni valore di  $\phi$  la forza di gravità  $mg$ , diretta lungo la verticale, può essere scomposta nelle componenti  $F_p = mg \cos \phi$  diretta perpendicolarmente all'asse maggiore della barra e  $F_L = mg \sin \phi$  diretta lungo tale asse.

Assunto che la barra non scivoli, l'attrito con lo spigolo provvederà ovviamente a bilanciare la componente  $F_L$ , (non ci interessa calcolare altre componenti della reazione vincolare, perché volendo calcolare  $\dot{\phi}$  rispetto a questo spigolo le forze da esso applicate danno contributo nullo, avendo braccio nullo).

A questo punto possiamo cercare di rendere la descrizione matematica un po' più semplice introducendo alcune approssimazioni<sup>4</sup>. Possiamo infatti limitarci a considerare solo piccole

<sup>4</sup> Un calcolo completo è riportato in un lavoro pubblicato in un CDrom edito dalla Associazione Didattica con le Tecnologie e che può essere richiesto ad ADT <http://www.adt.diginet.it>.

oscillazioni di una barra molto più lunga della distanza  $d$  tra i due fulcri. Queste condizioni equivalgono, dal punto di vista dello sviluppo del modello, ad approssimare  $\cos \theta \approx 1$  (cioè a considerare agente tutta la forza di gravità) e a porre  $d/L \ll 1$  (cioè a considerare la distanza dell'estremo della barra dal centro di rotazione uguale a  $L/2$ ).

Con tali approssimazioni si ottiene per l'accelerazione angolare  $\ddot{\theta}$ :

$$\ddot{\theta} = \frac{Mgd/2}{(mL^2/12)} = 6gd/L^2$$

Infine, poiché nel caso delle piccole oscillazioni si può approssimare la componente verticale dell'accelerazione (che è quella misurata dal sistema) con l'accelerazione tangenziale, si ottiene<sup>5</sup>:

$$a_z = a_t = (\ddot{\theta})L/2 = 3gd/L \quad (1)$$

Per piccole oscillazioni l'accelerazione degli estremi della barra può essere quindi considerata costante, dipendendo solo dalla geometria del sistema, ed è tanto minore quanto più piccolo è il rapporto  $d/L$ . Il modello che abbiamo ottenuto corrisponde quindi a quello di un moto uniformemente accelerato, una "caduta" in cui l'accelerazione di gravità è ridotta di un fattore  $3d/L$ .

Una previsione dell'andamento del periodo  $T$  di oscillazione si può allora ottenere per analogia con il caso classico della caduta di un grave dalla quota  $h$

Il tempo di caduta libera in funzione dell'altezza vale  $t(h) = \sqrt{2h/g}$ : sostituendo a  $g$  la accelerazione  $a_z = 3gd/L$  e ad  $h$  la massima escursione  $A$  dell'estremo della barra, si ottiene:

$$t(A) = T/4 = \sqrt{2AL/3gd}, \text{ ovvero}$$

$$T = 1.043 \sqrt{L/d} \sqrt{A} \quad (\text{in secondi se } A \text{ è in metri}). \quad (2)$$

La dipendenza di  $T$  da  $A$  rende conto del crescere della frequenza allo smorzarsi dell'oscillazione, fenomeno che si può osservare facilmente ad esempio anche con un mattone appoggiato su un piano orizzontale rigido con la sua faccia più piccola e abbandonato in posizione lontana dall'equilibrio ma con il baricentro all'interno della proiezione orizzontale della faccia inferiore.

### 1.3 Controllo sperimentale delle previsioni

Con le calcolatrici grafiche è facile ottenere una rappresentazione grafica del periodo  $T$  in funzione della radice dell'ampiezza. Ovviamente tale operazione non richiede necessariamente l'uso di un particolare strumento di calcolo. La praticità dell'uso della calcolatrice grafica risiede nella possibilità, una volta acquisiti i dati, di elaborarli direttamente, senza doverli prima trasferire su PC in un programma apposito, o manualmente su carta per la tradizionale elaborazione grafica.

In figura 6 è mostrato il risultato ottenuto con  $d=4$  cm  $\ll L=80$  cm. Nella figura sono riportati gli stessi dati sia nella forma in cui essi vengono mostrati sul display LCD della calcolatrice, sia

<sup>5</sup> Allo stesso risultato si giunge se si considerano separatamente i contributi (di segno opposto) dei momenti torcenti dovuti al peso dei due tratti di barra separati dallo spigolo che agisce da fulcro, l'uno lungo  $L_1=(L+d)/2$  e l'altro  $L_2=(L-d)/2$ :  $\tau = \left[ \int_0^{L_1} x \mu dx - \int_0^{L_2} x \mu dx \right] g \cos \theta$

in una forma rielaborata mediante software per PC (in questo caso Kaleidagraph<sup>6</sup>).  
 La retta interpolante (regressione lineare) vale  $T=(4.7\pm 0.3) \sqrt{A}$ .

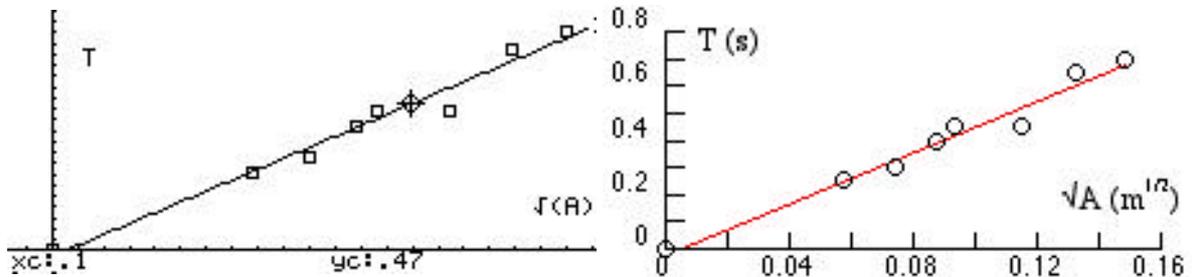


Figura 6 : Periodo in funzione della radice dell'ampiezza di oscillazione con  $d=4$  cm

Possiamo confrontare questo risultato con quello previsto dalla relazione (2) per  $L=80$  cm e  $d=4$  cm:  $T=4.66 \sqrt{A}$ . Il valore misurato per la pendenza è quindi compatibile con quello previsto entro gli errori sperimentali.

Se ripetiamo questo procedimento per oscillazioni registrate con  $d=2$  cm otteniamo un grafico come quello mostrato in figura 7, ove la retta interpolante ha equazione  $T=(6.7\pm 0.3) \sqrt{A}$ , da confrontare con quella prevista dalla relazione (2):  $T=6.6 \sqrt{A}$ ; anche in questo caso il valore della pendenza è compatibile con quello previsto.

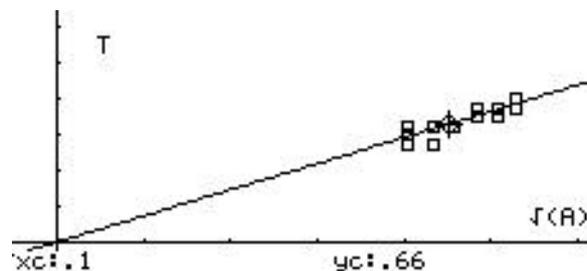


Figura 7 : Periodo in funzione della radice dell'ampiezza di oscillazione con  $d=2$  cm

Dalle misure precedenti emerge che le pendenze misurate tendono ad essere leggermente in eccesso rispetto a quelle previste. Questo effetto può essere attribuito al fatto che il modello vale per ampiezze che tendono a zero, mentre per valori crescenti dell'ampiezza ci dobbiamo aspettare che l'accelerazione sia inferiore (del fattore  $\cos$ ) rispetto a quella calcolata nella relazione (1), ovvero che il periodo sia maggiore (del fattore  $1/\cos$ ) rispetto a quello calcolato nella relazione (2).

## Il caso del fulcro tondo

Se si utilizza la stessa barra con un fulcro tondo, ad esempio un tubo metallico con il raggio di una decina di centimetri bloccato al piano di un tavolo mediante un morsetto, si possono

<sup>6</sup> Prodotto dalla Synergy-Software e assai più adatto di Excel per tracciare ed analizzare grafici su PC o Macintosh, più potente ma anche più costoso di Graphical Analysis.

studiare sperimentalmente le oscillazioni di questo diverso sistema con lo stesso apparato di misura.

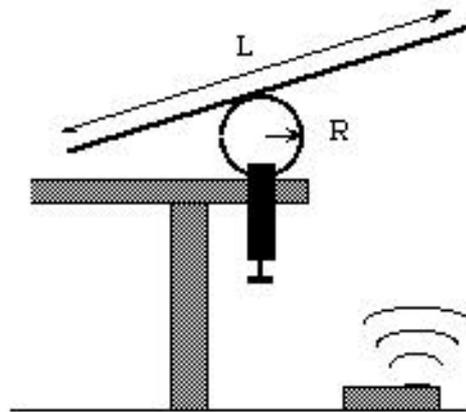


Figura 8

## 2.1 Caratteristiche del moto rilevabili qualitativamente dai grafici

Registrando in funzione del tempo la posizione e la velocità dell'estremo della barra (ad esempio in figura 9 è riportata la registrazione in funzione del tempo della elongazione  $z(t)$  e della corrispondente velocità ed accelerazione per una barra di alluminio con  $L=80$  cm e  $R=10$  cm) si nota subito che il moto presenta le caratteristiche tipiche del moto armonico: spostamento, velocità e accelerazione sono tre sinusoidi sfasate successivamente di  $\pi/2$ .

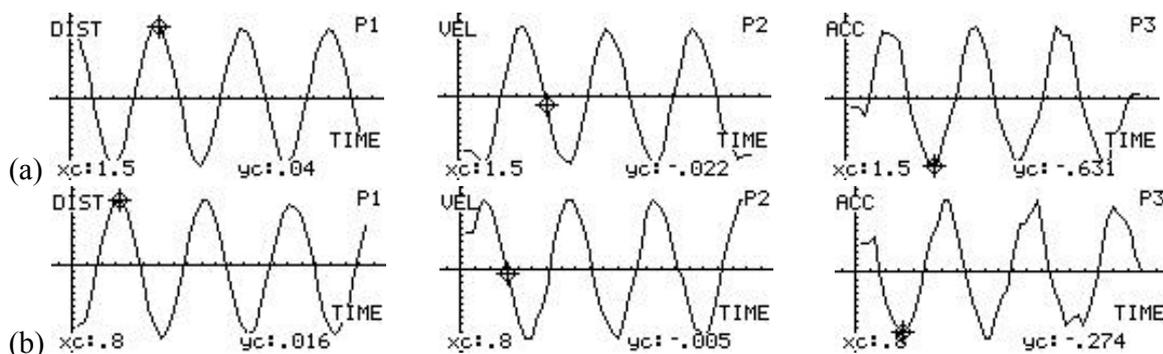


Figura 9: Posizione, velocità e accelerazione dell'estremità della barra su fulcro tondo con raggio  $R=10$  cm per valori diversi dell'ampiezza; (a) ampiezza 40 mm, (b) ampiezza 16 mm.

Utilizzando il cursore<sup>7</sup> si può mettere in evidenza anche che il periodo  $T=(1.47 \pm 0.01)$ s non dipende in modo apprezzabile dall'ampiezza (che varia da una acquisizione all'altra di un

<sup>7</sup> Si possono leggere nel grafico distanza/tempo diverse coppie di valori della ascissa (tempo) corrispondenti ad un massimo e al successivo minimo della ordinata (elongazione) e per differenza ottenere valori per il semi-periodo. Tali letture possono essere eseguite anche nel grafico velocità/tempo, fornendo valori di semi-periodo corrispondenti a tempi intermedi a quelli ottenuti con il grafico distanza/tempo.

fattore 2.5 : da 16 a 40 mm).

## 2.2 Analisi del moto e confronto con i dati sperimentali

Diversamente che nel caso di fulcro piatto (in cui il punto di appoggio della barra resta fisso su uno spigolo per mezzo periodo, e poi si sposta sull'altro spigolo per il successivo mezzo periodo), qui il contatto barra-fulcro si sposta con continuità. Lo spostamento del punto di appoggio vale infatti  $x=R \sin \phi$ , e il momento della forza agente sul baricentro è quindi  $\tau=x mg \cos \phi$ , ove anche il braccio della forza  $x$  dipende dall'angolo. Adesso anche il momento di inerzia è variabile, dipendendo da  $x$ , e quindi da  $\phi$ :  $I(\phi)=(m/12)L^2+mx^2$  (dal teorema di Steiner).

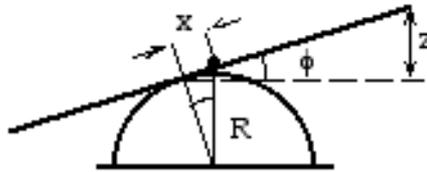


Figura 10

Anche in questo caso possiamo semplificare il nostro modello introducendo approssimazioni analoghe a quelle utilizzate nel caso precedente:  $x/L=(R/L)\ll 1$  e  $\cos \phi \approx 1$ , per piccole oscillazioni. Queste approssimazioni corrispondono a considerare il momento di inerzia sostanzialmente costante ( $I_0=m L^2 /12$ ) e tutta la forza di gravità agente sulla sbarra.

In queste condizioni si ottiene:

$$\ddot{\theta} = - (12gR/L^2) \theta \quad (3)$$

dove il segno meno tiene conto del fatto che per valori positivi dell'angolo la forza è diretta verso il basso.

Questa equazione ha la stessa forma della equazione del moto di un pendolo di lunghezza ridotta pari a  $\lambda=L^2/12R$ . (per piccole oscillazioni  $\omega = \sqrt{g/\lambda}$ )

Di conseguenza l'oscillazione risulta *armonica* con periodo

$$T=2\pi \sqrt{L^2/12gR} = L/\sqrt{3gR} \quad (4)$$

Questa relazione predice, per  $R=0.1\text{m}$ ,  $L=0.8\text{ m}$ , un periodo  $T=1.46\text{ s}$ , in buon accordo con il valore misurato (cfr. §2.1).

Analogamente usando un valore diverso per il raggio  $R$  del fulcro, ad esempio  $R =6.5\text{ cm}$ , si ottiene il grafico di figura 11, che fornisce  $T=(1.84\pm 0.01)\text{ s}$  contro la previsione di  $1.82\text{ s}$ .



Figura 11: Oscillazioni della stessa barra su fulcro tondo con raggio  $R=6.5\text{ cm}$

La relazione (4) spiega anche perché l'altalena su fulcro rotondo è tanto meno divertente quanto più piccolo è il raggio del fulcro (il periodo tende ad infinito per  $R$  tendente a zero).

### 3. Che cosa succede se si sale sull'altalena?

Si è visto nelle equazioni 2 e 4 che il periodo di oscillazione dell'altalena non dipende dalla *massa* della barra, ma solo dalla sua *lunghezza* e dalla *geometria* del fulcro (e, nel caso di fulcro piatto anche dall'ampiezza dell'oscillazione). Ciò è assai facile da verificare: basta osservare che il moto non cambia se al posto di una barra mettiamo in oscillazione due barre identiche sovrapposte una all'altra. Si potrebbe allora pensare che il moto non debba cambiare anche se l'altalena viene carica da due masse uguali aggiunte agli estremi, come nel caso in cui due persone salgono sull'altalena...

Se la barra è caricata con due masse uguali  $M$  agli estremi, la posizione del baricentro resta invariata e la componente della forza diretta perpendicolarmente all'asse maggiore della barra vale  $F_p = (m+2M)g \cos \theta$ .

Nel caso del fulcro piatto, il momento torcente applicato al baricentro, vale quindi  $\tau = F_p(d/2) = (d/2)(m+2M)g \cos \theta$ , che per piccole oscillazioni si riduce a  $Mgd$  nel caso sia  $M \gg m/2$ .

Il momento di inerzia diventa:  $I_{M,m} = \left\{ \frac{m}{3} (1+3d^2/L^2) + 2M (1+d^2/L^2) \right\} (L/2)^2$

Se valgono le disequaglianze  $2M \gg m/3$ , e  $d \ll L$ , allora  $I_{M,m} \approx ML^2/2$ , e per l'accelerazione si ottiene:

$$a_z = a_t = (d/2) \ddot{\theta} (L/2) = \tau / I_{M,m} (L/2) = Mgd / (ML^2/2) (L/2) = gd/L \quad (5)$$

cioè 1/3 rispetto al caso di barra scarica.

Questo mostra che (purché sia  $M \gg m/6$ ) non conta il valore della massa aggiunta ma solo il fatto che ora la massa è quasi tutta *concentrata alle estremità* e non *uniformemente distribuita* lungo la barra!

Le cose vanno all'incirca nello stesso modo nel caso del fulcro tondo.

Qui il momento torcente vale  $\tau = -x (m+2M)g \cos \theta$  e con analoghe approssimazioni (cioè per  $M \gg m/2$  e  $(R/L) \ll 1$ ) si ottiene  $\tau \approx -2 (R/L) Mg$ :

$$\tau / I_{M,m} \approx -2 (R/L) Mg / (ML^2/2) = -4gR/L^2 \quad \text{e } T = 2\pi \sqrt{L / (gR)} \quad (6)$$

In entrambi i casi il rapporto tra l'accelerazione (a parità di  $d/L$  o di  $R/L$ ) di una barra carica ed una scarica è quindi 3, e di conseguenza il rapporto dei periodi (a parità di ampiezza di oscillazione nel caso del fulcro piatto) è  $\sqrt{3}$ .

Una verifica sperimentale di questa previsione è relativamente facile. Nel nostro caso la barra di alluminio pesa  $m=250g$  e quindi abbiamo scelto di caricare gli estremi della barra con due masse uguali  $M=730g$  (due blocchi in ottone fissati con una vite).

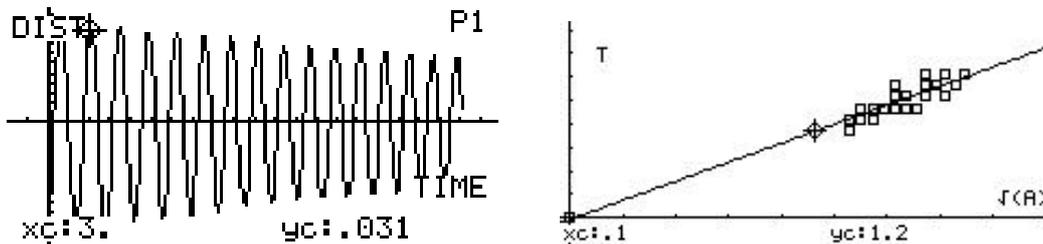


Figura 12: Oscillazioni di una barra caricata con due masse agli estremi, con  $d=2$  cm.

In queste condizioni abbiamo ripetuto l'esperimento che aveva prodotto il grafico di figura 7 per la barra scarica, ottenendo ora i grafici di figura 12. La pendenza ottenuta dal grafico del periodo in funzione della la radice dell'ampiezza è  $12 \pm 1$ , contro il valore 11.4 atteso dalle relazioni (2) e (5).

Analoga verifica può essere fatta per l'altalena a fulcro tondo (ad esempio con  $R=10$  cm e barra caricata dalle stesse masse  $M$ ): si ottiene il grafico di figura 13.

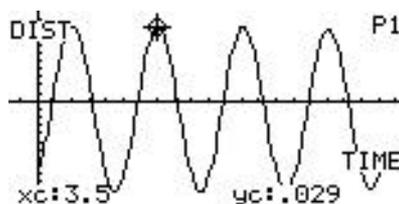


Figura 13: Oscillazioni di una barra caricata con due masse agli estremi, con  $R=10$  cm

Il periodo misurato risulta  $T=(2.5 \pm 0.2)$  s contro la previsione di  $T=2.54$  s della relazione(6).

L'errore nella misura dei valori della pendenza nel grafico 12 e del periodo nel grafico 13 è all'incirca del 10%, ma anche i valori previsti dalle relazioni (5) e (6) sono affetti da errore; in questo caso prevalentemente di tipo sistematico, dovuto alle approssimazioni introdotte. Se teniamo infatti conto dell'effetto della massa  $m$  (cioè non la trascuriamo rispetto a  $2M$ ) i valori delle accelerazioni (lineare  $a_z$  e angolare ) vengono moltiplicati per il fattore  $=\frac{(m+2M)}{(m/3+2M)}$ , e il periodo diviso per il fattore . Con  $m=250$ g e  $M=730$ g si ha  $=1.1$ .

#### 4. Considerazioni sullo smorzamento

Abbiamo osservato che quando, a parità di altre condizioni, la distanza  $d$  tra i fulcri è maggiore, anche lo smorzamento dell'oscillazione è maggiore: il caso estremo  $d=L$ , a tutti familiare, è quello in cui lasciamo cadere una barra inclinata sul pavimento. E in generale si può osservare che lo smorzamento è maggiore che per l'altalena a fulcro tondo.

Una spiegazione ci viene offerta dall'analisi del moto del baricentro della barra. Se, come in figura 14, tracciamo la traiettoria del baricentro per una oscillazione completa, vediamo che la coordinata  $z=(d/2)\sin$  del baricentro percorre, in un grafico  $z(t)$ , una serie di parabole, analoghe a quelle che descrivono il moto di una pallina che rimbalza.

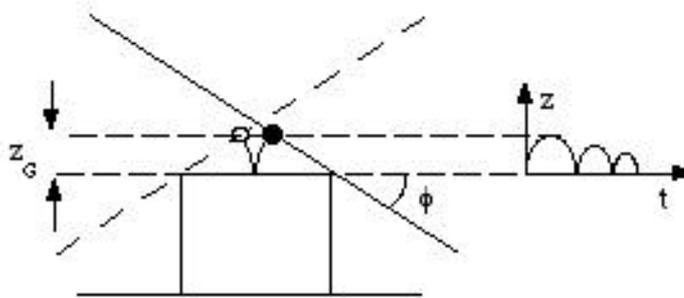


Figura 14: schematizzazione del moto del baricentro nell'altalena a doppio fulcro

Nel caso di una pallina che rimbalza quasi tutta l'energia cinetica traslazionale (acquistata a spese del lavoro del campo gravitazionale sulla massa in caduta) si trasforma in energia elastica (di deformazione della pallina e del pavimento) per poi riconvertirsi nell'energia cinetica corrispondente alla velocità verticale che è cambiata di segno dopo l'urto.

Nel caso dell'altalena a doppio fulcro la velocità con cui il baricentro della barra "rimbalza" è, nelle approssimazioni fin qui fatte,  $v_G = \sqrt{2z_G a_G} = \sqrt{6z_G g} (d/L)$  più piccola del fattore  $3(d/L)$  rispetto a quella che il baricentro avrebbe se la barra cadesse liberamente dall'altezza  $z_G$ . Ma anche se la barra è *poco elastica* il suo baricentro "rimbalza" assai bene.

Infatti buona parte dell'energia potenziale gravitazionale disponibile all'inizio del moto, quando la barra è immobile ed inclinata di un angolo  $\phi$  rispetto all'orizzontale, si trasforma in energia cinetica *rotazionale*, e solo una piccola parte in energia cinetica *traslazionale*. Anche se viene dissipata l'energia legata alla traslazione quella legata alla rotazione in prima approssimazione si conserva "nell'urto" e provvede a far risalire il baricentro riconvertendosi in energia potenziale.

Facciamo la ragionevole approssimazione che la perdita di energia in ogni semi-periodo sia solo quella dell'energia cinetica traslazionale, che è proporzionale al quadrato della velocità del baricentro quando la barra attraversa la posizione di equilibrio  $v_G^2 = 6z_G g (d/L)^2$ . Dato che, a parità di inclinazione iniziale  $\phi$ , anche l'elongazione è proporzionale a  $d(z_G/d)^{1/2}$  la perdita di energia ad ogni urto è proporzionale a  $d^3/L^2$ . Questo rende conto del fatto che lo smorzamento cresce con la distanza tra i fulcri.

Nella nostra analisi abbiamo considerato trascurabile l'effetto della viscosità dell'aria che invece diventa importante nell'altalena a fulcro tondo. In quel caso infatti non ci sono discontinuità nella velocità del baricentro (urti) e quindi (nell'ipotesi di fulcro perfettamente cilindrico e barra perfettamente piana, ed entrambi perfettamente rigidi) la dissipazione può essere attribuita solo alla viscosità dell'aria; in realtà ogni minima imperfezione e deformazione<sup>8</sup> contribuiscono a dare un attrito volvente, e quindi smorzamento<sup>9</sup>.

<sup>8</sup> Per convincersene basta ripetere l'esperimento poggiando un sottile foglio di gomma sul fulcro tondo: si vedrà che lo smorzamento cresce notevolmente

<sup>9</sup> Lo smorzamento risulta sempre molto minore per il caso di fulcro tondo rispetto al caso del fulcro piatto, e in ogni caso cresce con la frequenza di oscillazione. Ciò è in accordo sia con le considerazioni che abbiamo già esposte, sia con l'ipotesi che la parte preponderante della dissipazione nell'altalena a fulcro tondo sia da attribuire alla viscosità dell'aria (termine dissipativo in prima approssimazione proporzionale alla velocità).

## 5. Conclusioni

Contrariamente all'impressione che si può ricavare dalla maggioranza dei testi scolastici di fisica, che si limitano a trattare al più il caso del moto armonico semplice, i moti oscillatori che si presentano nella vita di tutti i giorni sono solo raramente moti armonici. Ciò è dovuto al fatto che, data la presenza di un campo gravitazionale praticamente costante, la forza di richiamo che genera la maggioranza dei moti oscillatori è la forza di gravità stessa o una sua componente lungo una particolare direzione, quindi una forza costante e non dipendente dalla posizione.

In alcuni casi la dipendenza dalla posizione può realizzarsi per effetto della geometria del sistema (come nel caso dell'altalena a fulcro tondo e del moto circolare del pendolo) ma in tali casi la dipendenza della forza dalla posizione non è lineare e può essere approssimata al caso lineare solo per piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio.

Un moto *intrinsecamente armonico* può essere generato solo in un sistema in cui la forza di richiamo sia effettivamente *linearmente dipendente dalla posizione* del corpo che oscilla, come nel caso di un corpo attaccato ad una molla lineare, dove la gravità svolge un ruolo solo nella determinazione della posizione del punto di equilibrio.

Un caso particolare è quello della *spinta di Archimede* (che pure è legata alla presenza del campo gravitazionale) che, dipendendo linearmente dal volume del corpo immerso, può generare una forza proporzionale allo spostamento, e quindi un moto intrinsecamente armonico, purchè il corpo che oscilla immergendosi più o meno nel liquido abbia *sezione costante* (cilindro o parallelepipedo)<sup>10</sup>.

Come documenta lo studio del moto dell'altalena, uno dei campi della fisica che possono essere studiati con indubbio vantaggio mediante sistemi di acquisizione on-line è proprio la meccanica dei moti oscillatori.

Questo perché in un moto oscillatorio è assai importante cogliere *l'evoluzione temporale* del fenomeno, e il poter analizzare i grafici di posizione, velocità e accelerazione in funzione del tempo spesso permette una valutazione immediata delle caratteristiche essenziali del particolare tipo di oscillazione.

Il sistema sensore-interfaccia-elaboratore consente cioè di *estendere le potenzialità dell'occhio e della memoria* dello studente che osserva il fenomeno, offrendo, da un lato una registrazione permanente dei dati sperimentali per una successiva rielaborazione (anche lontano dal laboratorio, ove il fenomeno non è più disponibile), dall'altro la possibilità di caratterizzare immediatamente in modo *qualitativo* il sistema in esame, individuando dalla forma del grafico relazioni fondamentali tra le variabili caratteristiche del fenomeno.

Inoltre l'analisi dei dati sperimentali in rappresentazioni grafiche meno diffuse in ambito scolastico (velocità/posizione, accelerazione/posizione, forza/accelerazione, forza/posizione...), facilmente ottenibili mediante il software di acquisizione, può offrire spunti preziosi per approfondire la comprensione del fenomeno in esame.

D'altra parte la disponibilità dei dati sperimentali nella loro interezza consente di procedere successivamente ad una analisi *quantitativa* e non più solo *qualitativa*.

Infine non è da trascurare il fatto che, date le caratteristiche di portabilità dei più moderni sistemi di acquisizione, è possibile effettuare misure anche in ambienti diversi dal tradizionale

---

<sup>10</sup> B. Pecori, G. Torzo, A. Sconza, "Harmonic and Anharmonic Oscillations investigated by using a Microcomputer Based Atwood's Machine", *Am. J. Phys.*, **67**, 228-235 (1999)

laboratorio. Come descritto in un recente articolo su questa rivista<sup>11</sup> è possibile introdurre uno studio dei moti oscillatori partendo dall'osservazione dei moti realizzati dagli studenti stessi usando gli attrezzi della palestra della scuola. Una osservazione qualitativa o semiquantitativa dei grafici che si ottengono misurando la posizione dell'estremo di una altalena realizzata mediante una scala appoggiata sulla trave consente, ad esempio, di cogliere le caratteristiche fondamentali del moto (accelerazione costante, periodo dipendente dall'ampiezza) che potranno poi essere studiate in maniera più approfondita riproducendo lo stesso moto nelle condizioni meglio controllate del laboratorio.

Esperienze di questo tipo ci sembrano, oltre che piacevoli per gli studenti, anche particolarmente significative dal punto di vista didattico in quanto forniscono agli studenti l'occasione di rendersi conto che gli strumenti concettuali della fisica costituiscono un modo particolare di guardare ai fenomeni che ci circondano e non semplicemente una serie di relazioni formali, avulse dalla nostra esperienza, come spesso possono apparire dalla lettura di un libro di testo.

---

<sup>11</sup> O. Foà , A. Rambelli, B. Pecori, G. Torzo, "Saltelli, rimbalzi e altre acrobazie: come coinvolgere gli studenti nello studio delle oscillazioni" *La Fisica nella Scuola*, XXXIII (2000)